Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°5
Samedi 8 février 2025 (4h00)

Exercice 1 : Informatique

1. `A=[[-2,0,4],[1,2,-1]]`

2. `A[1][2]`

3.
```
def produit(B):
    nlignesB=len(B)
    ncolonnesB=len(B[0])
    if nlignesB!=3:
        return("le produit n’est pas défini")
    else:
        P = [[0 for j in range(ncolonnesB)] for i in range(2)]
        for i in range (2):
            for j in range (ncolonnesB):
                for k in range (3):
                    P[i][j]+=A[i][k]*B[k][j]
    return P
```

Exercice 2 : La part du lion

1. • On a $u_2 = \mathbb{P}(G_1 \cap G_2)$.

   Puisque les jours sont indépendants, il vient $u_2 = \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}(G_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ donc $\boxed{u_2 = \frac{4}{9}.}$

   • De même, $u_3 = \mathbb{P}(Z_1 \cap G_2 \cap G_3) = \mathbb{P}(Z_1) \times \mathbb{P}(G_2) \times \mathbb{P}(G_3) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ donc $\boxed{u_3 = \frac{4}{27}.}$

   • Les seules contraintes pour que la première fois que le lion ait mangé deux gazelles de suite aux troisième et quatrième repas sont qu'il ait mangé un zèbre le deuxième jour et une gazelle le troisième et le quatrième jour (le premier jour n'ayant dans ce cas aucune importance).

   Ainsi, $\boxed{E_4 = Z_2 \cap G_3 \cap G_4}$. En utilisant encore l'indépendance des jours, on a donc $u_4 = \mathbb{P}(E_4) = \mathbb{P}(Z_2) \times \mathbb{P}(G_3) \times \mathbb{P}(G_4) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ donc $\boxed{u_4 = \frac{4}{27}.}$

2. (a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

   Par définition de l'événement E_{n+2}^k, ce qui se passe avant le k-ème jour n'influe aucunement sur sa réalisation. On se rappelle également que les jours sont indépendants et notons que du k-ème jour au $n+2$-ème jour inclus, il y $n+2-k+1 = n-k+3$ jours.

   Ainsi, la probabilité que l'événement E_{n+2}^k se réalise, c'est à dire que, entre le k-ème jour et le $n+2$-ème le lion mange pour la première fois une gazelle deux fois de suite aux $(n+1)$-ème et $(n+2)$-ème jour, revient à calculer la probabilité que le lion mange pour la première fois une gazelle deux fois de suite aux $(n-k+2)$-ème et $(n-k+3)$-ème jour, ce qui est la probabilité de l'événement E_{n-k+3}.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(E^k_{n+2} = \mathbb{P}(E_{n-k+3}) = u_{n-k+3}.}$

(b) Pour que le lion mange pour la première fois deux fois d'affilée de la gazelle aux $(n+1)-$ème et $(n+2)$-ème jours, il y a deux cas :

— Soit le lion a mangé un zèbre le premier jour, auquel cas, la première fois qu'il aura mangé de la gazelle deux fois de suite entre le deuxième et le $(n+2)$-ème jour sera aux $(n+1)$-ème et $(n+2)$-ème jours, ce qui est l'événement $Z_1 \cap E^2_{n+2}$;

— Soit le lion a mangé une gazelle le premier jour. Puisque $n+2 \geqslant 4$, il ne peut pas avoir mangé de la gazelle aux deux premiers jours. Il a donc nécessairement mangé un zèbre le deuxième jour, puis, la première fois qu'il aura mangé de la gazelle deux fois de suite entre le troisième et le $(n+2)$-ème jour sera aux $(n+1)$-ème et $(n+2)$-ème jours, ce qui est l'événement $G_1 \cap Z_2 \cap E^3_{n+2}$.

On a donc

$$\boxed{E_{n+2} = (Z_1 \cap E^2_{n+2}) \sqcup (G_1 \cap Z_2 \cap E^3_{n+2}).}$$

(c) • On a $\mathbb{P}_{Z_1}(E_{n+2}) = \dfrac{\mathbb{P}(Z_1 \cap E_{n+2})}{\mathbb{P}(Z_1)}$.

Or, d'après la question précédente, on a

$$E_{n+2} \cap Z_1 = (Z_1 \cap Z_1 \cap E^2_{n+2}) \sqcup (Z_1 \cap G_1 \cap Z_2 \cap E^3_{n+2}) = (Z_1 \cap E^2_{n+2})$$

puisque $Z_1 \cap G_1 = \emptyset$.

On obtient donc (en utilisant de nouveau l'indépdndance des jours et le résultat de la question a)) :

$$\mathbb{P}_{Z_1}(E_{n+2}) = \frac{\mathbb{P}(Z_1 \cap E^2_{n+2})}{\mathbb{P}(Z_1)} = \frac{\mathbb{P}(Z_1) \times \mathbb{P}(E^2_{n+2})}{\mathbb{P}(Z_1)} = \mathbb{P}(E^2_{n+2}) = u_{n-2+3}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}_{Z_1}(E_{n+2}) = u_{n+1}.}$

• En raisonnant de même, on a

$$\mathbb{P}_{G_1}(E_{n+2}) = \frac{\mathbb{P}(E_{n+2} \cap G_1)}{\mathbb{P}(G_1)} = \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap Z_2 \cap E^3_{n+2})}{\mathbb{P}(G_1)} = \mathbb{P}(Z_2) \times \mathbb{P}(E^3_{n+2}) = \frac{1}{3}u_{n-3+3}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}_{G_1}(E_{n+2}) = \frac{1}{3}u_n.}$

(d) D'après la formule des probabilités dans le système complet d'événements (Z_1, G_1), on a

$$u_{n+2} = \mathbb{P}(E_{n+2}) = \mathbb{P}(Z_1) \times \mathbb{P}_{Z_1}(E_{n+2}) + \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}_{G_1}(E_{n+2}) = \frac{1}{3} \times u_{n+1} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}u_n$$

d'où $\boxed{u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n.}$

3. • Pour que la relation soit vraie pour $n = 1$, il faut qu'on ait $u_3 = \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{9}u_1$ d'où

$$u_1 = \frac{9}{2}\left(u_3 - \frac{1}{3}u_2\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{4}{27} - \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}\right)$$

i.e. $\boxed{u_1 = 0.}$

- Pour que la relation soit vraie pour $n=0$, il faut qu'on ait $u_2 = \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{9}u_0$ d'où

$$u_0 = \frac{9}{2}\left(u_2 - \frac{1}{3}u_1\right) = \frac{9}{2} \times \frac{4}{9}$$

i.e. $\boxed{u_0 = 2.}$

4.
```
def masuite(n):
    if n==0:
        return 2
    elif n==1:
        return 0
    else:
        return masuite(n-1)/3+2*masuite(n-2)/9
```

5. L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est

$$(EC) : r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{2}{9} = 0$$

dont les racines sont $r_1 = \frac{2}{3}$ et $r_2 = -\frac{1}{3}$.

Il existe donc deux réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda\left(\frac{2}{3}\right)^n + \mu\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

En évaluant pour $n=0$ et $n=1$, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & \lambda + \mu \\ u_1 & = & \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2 & = & \lambda + \mu \\ 0 & = & \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3\lambda & = & 2 \\ \mu & = & 2\lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & \frac{2}{3} \\ \mu & = & \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ i.e.

$$\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 4 \times \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}.}$$

Exercice 3 : Détection du paludisme

1. (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Calculons la probabilité que le test de H_i soit négatif. Ceci correspond au fait que les k prélèvements du groupe G_i soient négatifs. On peut supposer qu'ils sont indépendants et on obtient que cette probabilité vaut $(1-p)^k$.

   Ainsi, la probabilité que le test de H_i soit positif est $\boxed{1-(1-p)^k.}$

   (b) Posons pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la variable aléatoire X_i égale à 1 si le test de H_i est positif, égale à 0 sinon.

   D'après la question précédente, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^k$.

   Ainsi, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes (parce que les groupes sont indépendants) suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^k$.

D'après le cours, X suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1-(1-p)^k)$, i.e. $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-(1-p)^k).}$

On a donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = n(1-(1-p)^k)}$ et $\boxed{V(X) = n(1-(1-p)^k)(1-p)^k}$.

2. (a) La variable aléatoire T désigne le nombre de tests effectués. On commence par tester tous les échantillons $(H_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, ce qui représente n tests. Ensuite, pour les $i \in [\![1, n]\!]$ tels que H_i est positif (il y en a X), on teste les k prélèvements du groupe G_i.
Ainsi, $\boxed{T = kX + n.}$

(b) Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(T) = k\mathbb{E}(X)+n$ d'où $\boxed{\mathbb{E}(T) = kn(1-(1-p)^k) + n.}$
Enfin, puisque n est une constante, on a $V(T) = V(kX+n) = k^2V(X)$ d'où $\boxed{V(X) = k^2n(1-(1-p)^k)(1-p)^k.}$

3. (a) Le nombre $nk = N$ est le nombre total d'individus dans la population (et donc le nombre de tests qu'il aurait fallu effectuer si on avait voulu tester toute la population) et T est le nombre de tests effectués par cette méthode. La variable aléatoire $nk - T$ représente donc $\boxed{\text{le nombre de tests économisés par cette méthode}}$.
Toujours par linéarité de l'espérance, et puisque nk est une constante, on a

$$\mathbb{E}(nk - T) = nk - \mathbb{E}(T) = nk - nk(1-(1-p)^k) - n = nk(1-p)^k - n$$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(nk-T) = n(k(1-p)^k - 1).}$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = xe^{x\ln(q)} - 1$. La fonction f est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = e^{x\ln(q)} + \ln(q)xe^{x\ln(q)} = e^{x\ln(q)}(x\ln(q)+1).$$

Puisque pour tout $x > 0, e^{x\ln(q)} > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $x\ln(q)+1$.
On a alors $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x\ln(q)+1 > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{\ln(q)}$ car $\ln(q) < 0$ puisque $q \in]0,1[$.
On a donc le tableau de variation suivant pour la fonction f :

x	0		$-\dfrac{1}{\ln(q)}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$f(-\frac{1}{\ln(q)})$	$\searrow$	-1

En effet, puisque $\ln(q) > 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(q) = -\infty$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(q)} = 0$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x\ln(q)} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1.$$

Par ailleurs, on a $f(0) = -1$ et la fonction f admet un maximum en $-\dfrac{1}{\ln(q)}$ qui vaut

$$f\left(-\frac{1}{\ln(q)}\right) = -\frac{1}{\ln(q)}e^{-1} - 1.$$

(c) D'après la question 3.a), on a $\mathbb{E}(n_0k_T) = n_0(k(1-p)^k - 1)$.

Puisqu $n_0 > 0$, cette quantité est maximale lorsque $k(1-p)^k - 1$ l'est. En posant $q = 1-p = 0,908$, ceci revient à trouver l'entier k pour lequel $f(k)$ est maximum.
D'après la question précédente, $k = \left\lfloor -\dfrac{1}{\ln(q)} \right\rfloor = 10$ ou $k = \left\lfloor -\dfrac{1}{\ln(q)} \right\rfloor + 1 = 11$.
Or, $f(10) \sim 2,809$ et $f(11) \sim 2,804$ donc la valeur optimale de k est $\boxed{k = 10.}$

Problème 1 : Des bactéries et une molécule mutagène

1. Pusqu'il y avait deux individus normaux et un individu mutant au jour 0, il pourra y avoir un ou deux individus normaux à la fin du premier jour donc $\boxed{Y_1(\Omega) = \{1,2\}.}$
   Avec les notations de l'énoncé, on a alors
   $$\boxed{\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(N_1) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_1 = 2) = \mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{3}.}$$
2. A partir du deuxième jour, si les deux individus touchés lors des deux premiers jours ont été les individus normaux présents au début de l'expérience, tous auront mutés et on aura $Y_2 = 0$. En revanche, si la molécule mutagène touche toujours l'individu mutant, les deux individus normaux le resteront. Enfin, il est également possible de rester à un seul individu normal si celui-ci est épargné.
   On a donc $\boxed{\text{pour tout}\, n \geqslant 2, Y_n(\Omega) = [\![0,2]\!].}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{P}(Y_n = 2) = \mathbb{P}(M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n)$.
   D'après la formule des proabilités composées, on a
   $$\mathbb{P}(Y_n = 2) = \mathbb{P}(M_1) \times \mathbb{P}_{M_1}(M_2) \times \mathbb{P}_{M_1 \cap M_2}(M_3) \times \dots \mathbb{P}_{M_1 \cap \dots \cap M_{n-1}}(M_n).$$
   On sait que $\mathbb{P}(M_1) = \mathbb{P}(Y_1 = 2) = \dfrac{1}{3}$.
   Par ailleurs, pour tout $k \in [\![2,n]\!], \mathbb{P}_{M_1 \cap \dots \cap M_{k-1}}(M_k) = \dfrac{1}{3}$ puisque c'est la probabilité qu'au jour k, la molécule mutagène atteigne un individu mutant sachant que la même situation s'est produite tous les jours d'avant. Cela signifie qu'au jour k, la boîte de Petri est toujours consituée d'un individu mutant et de deux individus normaux donc la probabilité que la molécule mutagène atteigne un individu mutant vaut $\dfrac{1}{3}$.
   Finalement, $\boxed{\text{pour tout}\, n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y_n = 2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n.}$
4. (a) On a $\boxed{u_1 = \mathbb{P}(Y_1 = 1) = \dfrac{2}{3}.}$
   Ensuite,
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_2 = 1) &= \mathbb{P}((N_1 \cap M_2) \sqcup (M_1 \cap N_2)) \\ &= \mathbb{P}(N_1 \cap M_2) + \mathbb{P}(M_1 \cap N_2) \\ &= \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(M_2) + \mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}_{M_1}(N_2) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$
   donc $\boxed{u_2 = \mathbb{P}(Y_2 = 1) = \dfrac{2}{3}.}$

(b) Soit $n \geqslant 2$. D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(Y_n = i)_{0\leqslant i\leqslant 2}$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \mathbb{P}(Y_{n+1}=1)\\
&= \mathbb{P}(Y_n=0)\times\mathbb{P}_{(Y_n=0)}(Y_{n+1}=1)+\mathbb{P}(Y_n=1)\times\mathbb{P}_{(Y_n=1)}(Y_{n+1}=1)\\
&\quad +\mathbb{P}(Y_n=2)\times\mathbb{P}_{(Y_n=2)}(Y_{n+1}=1)\\
&= \mathbb{P}(Y_n=0)\times 0+u_n\times\mathbb{P}_{(Y_n=1)}(M_{n+1})+\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\mathbb{P}_{(Y_n=2)}(N_{n+1})\\
&= u_n\times\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{pour tout}\, n\geqslant 2, u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3^{n+1}}.}$

Si $n=1$, on a $\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}u_1+\frac{2}{3^2}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}=u_2$ donc la relation reste valable pour $n=1$.

Ainsi, on a $\boxed{\text{pour tout}\, n\geqslant 1, u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3^{n+1}}.}$

(c) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{2}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}u_n+\frac{4}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\left(u_n+\frac{2}{3^n}\right)=\frac{2}{3}v_n$$

donc $\boxed{\text{la suite}\,(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\ \text{est géométrique de raison}\ \frac{2}{3}.}$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$v_n=v_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(u_1+\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{4}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{2^{n+1}}{3^n}$$

donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=v_n-\frac{2}{3^n}=\frac{2^{n+1}}{3^n}-\frac{2}{3^n}$ i.e.

$$\boxed{\text{pour tout}\, n\in\mathbb{N}^*, u_n=\frac{2}{3^n}(2^n-1).}$$

5. Soit $n\geqslant 1$. L'événement $(Y_n=1)$ est réalisé si au cours des n jours, la molécule mutagène n'a atteint qu'une seule fois une bactérie normale et a atteint une bactérie mutante tous les autres jours.
Ainsi, on a

$$(Y_n=1)=(N_1\cap M_2\cap\cdots\cap M_n)\sqcup(M_1\cap N_2\cap M_3\cap\cdots\cap M_n)\sqcup\cdots\sqcup(M_1\cap\cdots\cap M_{k-1}\cap N_k\cap M_{k+1}\cap\cdots\cap M_n)$$
$$\sqcup\cdots\sqcup(M_1\cap\cdots\cap M_{n-1}\cap N_n)$$

d'où

$$(Y_n=1)=\bigsqcup_{k=1}^{n}(M_1\cap\cdots\cap M_{k-1}\cap N_k\cap M_{k+1}\cap\cdots\cap M_n)$$

donc, d'après la formule des probabilités composées, il en découle que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n=1) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(M_1\cap\cdots\cap M_{k-1}\cap N_k\cap M_{k+1}\cap\cdots\cap M_n)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(M_1)\times\cdots\times\mathbb{P}_{M_1\cap\cdots\cap M_{k-2}}(M_{k-1})\mathbb{P}_{M_1\cap\cdots\cap M_{k-1}}(N_k)\times\mathbb{P}_{M_1\cap\cdots\cap M_{k-1}\cap N_k}(M_{k+1})\times\\
&\quad \cdots\times\mathbb{P}_{M_1\cap\cdots\cap M_{k-1}\cap N_k\cap M_{k+1}\cap\cdots\cap M_{n-1}}(M_n).
\end{aligned}$$

Or, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a $\mathbb{P}(M_1)\times\cdots\times\mathbb{P}_{M_1\cap\cdots\cap M_{k-2}}(M_{k-1}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ (puisque chaque jour, la molécule mutagène a atteint la seule bactérie mutante).
Ensuite, pour tout $k\in[\![1,n]\!], \mathbb{P}_{M_1\cap\cdots\cap M_{k-1}}(N_k)=\frac{2}{3}$ puisqu'il reste deux bactéries normales parmi les trois au k-ème jour si la molécule mutagène n'a touché que la bactérie mutante les jours précédents.
Enfin, les jours suivants, il y aura 2 bactéries mutantes parmi les trois donc pour tout $k\in[\![1,n]\!]$,

$$\mathbb{P}_{M_1\cap\cdots\cap M_{k-1}\cap N_k}(M_{k+1})\times\cdots\times\mathbb{P}_{M_1\cap\cdots\cap M_{k-1}\cap N_k\cap M_{k+1}\cap\cdots\cap M_{n-1}}(M_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}(Y_n=1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}=\frac{2}{3^n}\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}=\frac{2}{3^n}\sum_{i=0}^{n-1}2^i$$

en posant le changement d'indice $i=n-k$.
On obtient donc

$$\mathbb{P}(Y_n=1)=\frac{2}{3^n}\times\frac{1-2^n}{1-2},$$

i.e. $\boxed{\text{pour tout}\, n\geqslant 1, \mathbb{P}(Y_n=1)=\frac{2}{3^n}(2^n-1).}$

6. • Si $n=1, \mathbb{P}(Y_n=0)=\mathbb{P}(Y_1=0)=0$ puisque $Y_1(\Omega)=\{1,2\}$.
   • Soit $n\geqslant 2$. On a $\mathbb{P}(Y_n=0)+\mathbb{P}(Y_n=1)+\mathbb{P}(Y_n=2)=1$ donc

$$\mathbb{P}(Y_n=0)=1-\mathbb{P}(Y_n=1)-\mathbb{P}(Y_n=2)=1-\frac{2}{3^n}(2^n-1)-\frac{1}{3^n}=\frac{3^n-2^{n+1}+2-1}{3^n}$$

d'où, pour tout $n\geqslant 2, \mathbb{P}(Y_n=0)=\dfrac{3^n-2^{n+1}+1}{3^n}$.
On constate que pour $n=1, \dfrac{3^n-2^{n+1}+1}{3^n}=\dfrac{3-4+1}{3}=0=\mathbb{P}(Y_1=0)$ donc la formule est valable également pour $n=1$ et on a

$$\boxed{\text{pour tout}\, n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y_n=0)=\frac{3^n-2^{n+1}+1}{3^n}.}$$

7. Soit $n\geqslant 1$. On a

$$\mathbb{E}(Y_n)=0\times\mathbb{P}(Y_n=0)+1\times\mathbb{P}(Y_n=1)+2\times\mathbb{P}(Y_n=2)=\frac{2}{3^n}(2^n-1)+2\times\frac{1}{3^n}=\frac{2^{n+1}}{3^n}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(Y_n) = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.}$

Puisque $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Y_n) = 0.}$

Ceci signifie que le nombre moyen d'individus normaux présents dans la population de bactéries après un très grand nombre de jours va tendre vers 0.

8. (a) Comme vu précédemment, les individus normaux peuvent disparaître à partir du 2-ème jour donc $\boxed{Z(\Omega) = [\![2, +\infty[\![.}$

(b) On a pour tout $k \geqslant 2$, $\boxed{(Z = k) = (Y_{k-1} = 1) \cap (Y_k = 0).}$

(c) Pour tout $k \geqslant 2$, on a

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(Z = k) & = & \mathbb{P}((Y_{k-1} = 1) \cap (Y_k = 0)) \\ & = & \mathbb{P}(Y_{k-1} = 1) \times \mathbb{P}_{(Y_{k-1}=1)}(Y_k = 0) \\ & = & \dfrac{2}{3^{k-1}}(2^{k-1} - 1) \times \mathbb{P}_{(Y_{k-1}=1)}(N_k) \\ & = & \dfrac{2}{3^{k-1}}(2^{k-1} - 1) \times \dfrac{1}{3} \end{array}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 2, \mathbb{P}(Z = k) = \frac{2^k - 2}{3^k}.}$

Problème 2 : Autour de pile ou face

1. Puisque X_N compte le nombre de changements, on se réfère toujours au lancer précédent : ainsi, le deuxième lancer peut apporter un changement, le troisième lancer un deuxième changement, et ainsi de suite jusqu'au N-ème lancer qui peut apporter un $N-1$-ème changement. Enfin, tous les nombres de changements entre 0 et N_1 sont possibles donc $\boxed{X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!].}$

2. • D'après la question précédente, $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
On a $(X_2 = 0) = (P_1 \cap P_2) \sqcup (F_1 \cap F_2)$. Puisque les lancers sont indépendants, on en déduit que

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{2}.}$

Il s'ensuit que $\boxed{\mathbb{P}(X_2 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{2}.}$

On reconnaît une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, i.e. $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{2}.}$

• D'après la question précédente, $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
On a $(X_3 = 0) = (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \sqcup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)$. Puisque les lancers sont indépendants, on en déduit que

$$\mathbb{P}(X_3 = 0) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(P_3) + \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \mathbb{P}(F_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(X_3 = 0) = \frac{1}{4}.}$

De même, $(X_3=2)=(P_1\cap F_2\cap P_3)\sqcup(F_1\cap P_2\cap F_3)$. Puisque les lancers sont indépendants, on en déduit que

$$\mathbb{P}(X_3=2)=\mathbb{P}(P_1)\times\mathbb{P}(F_2)\times\mathbb{P}(P_3)+\mathbb{P}(F_1)\times\mathbb{P}(P_2)\times\mathbb{P}(F_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(X_3=2)=\frac{1}{4}.}$

Enfin, puisque $\mathbb{P}(X_3=0)+\mathbb{P}(X_3=1)+\mathbb{P}(X_3=2)=1$, on a

$$\mathbb{P}(X_3=1)=1-\mathbb{P}(X_3=0)-\mathbb{P}(X_3=2)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(X_3=1)=\frac{1}{2}.}$

Ainsi, $\mathbb{E}(X_3)=0\times\mathbb{P}(X_3=0)+1\times\mathbb{P}(X_3=1)+2\times\mathbb{P}(X_3=2)=\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ d'où $\boxed{\mathbb{E}(X_3)=1.}$

3. • On a

$$\mathbb{P}(X_N=0)=\mathbb{P}((P_1\cap\cdots\cap P_N)\sqcup(F_1\cap\cdots\cap F_N))=\mathbb{P}(P_1)\times\cdots\times\mathbb{P}(P_N)+\mathbb{P}(F_1)\times\cdots\times\mathbb{P}(F_N)$$

d'où

$$\boxed{\mathbb{P}(X_N=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^N+\left(\frac{1}{2}\right)^N=2\left(\frac{1}{2}\right)^N=\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}.}$$

• D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements (P_1,F_1), on a

$$\mathbb{P}(X_N=1)=\mathbb{P}(P_1\cap(X_N=1))+\mathbb{P}(F_1\cap(X_N=1)).$$

D'une part, on a (toujours par indépendance des lancers) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P_1\cap(X_N=1)) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=2}^{N}P_1\cap\cdots\cap P_{k-1}\cap F_k\cap F_{k+1}\cap\cdots\cap F_N\right)\\ &= \sum_{k=2}^{N}\mathbb{P}(P_1)\times\ldots\mathbb{P}(P_{k-1})\times\mathbb{P}(F_k)\times\mathbb{P}(F_{k+1})\times\cdots\times\mathbb{P}(F_N)\\ &= \sum_{k=2}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^N\\ &= (N-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^N.\end{aligned}$$

On montre de la même manière que $\mathbb{P}(F_1\cap(X_N=1))=(N-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^N$ donc

$$\mathbb{P}(X_N=1)=(N-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^N+(N-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^N=2(N-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(X_N=1)=(N-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}.}$

4. (a) Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(X_N=k)}(X_{N+1}=k) &= \mathbb{P}((P_N \cap P_{N+1}) \sqcup (F_N \cap F_{N+1})) \\
&= \mathbb{P}(P_N) \times \mathbb{P}(P_{N+1}) + \mathbb{P}(F_N) \times \mathbb{P}(F_{N+1}) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, N-1]\!], \mathbb{P}_{(X_N=k)}(X_{N+1}=k) = \frac{1}{2}.}$

(b) Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X_{N+1}-X_n=0) \cap (X_N=k)) &= \mathbb{P}(X_N=k) \times \mathbb{P}_{(X_N=k)}(X_{N+1}-X_N=0) \\
&= \mathbb{P}(X_N=k) \times \mathbb{P}_{(X_N=k)}(X_{N+1}=k)
\end{aligned}$$

d'où, en appliquant la question précédente,

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, N-1]\!], \mathbb{P}((X_{N+1}-X_n=0) \cap (X_N=k)) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_N=k).}$$

(c) En sommant le résultat de la question précédente pour $k \in [\![0, N-1]\!]$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}((X_{N+1}-X_n=0) \cap (X_N=k)) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X_N=k).$$

Puisque $X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$, les événements $(X_N=k)_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$ forment un système complet d'événements donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X_N=k) = 1$.

Par ailleurs, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}((X_{N+1}-X_n=0) \cap (X_N=k)) = \mathbb{P}(X_{N+1}-X_N=0).$$

On obtient donc bien $\boxed{\mathbb{P}(X_{N+1}-X_N=0) = \frac{1}{2}.}$

(d) Il y a deux cas : si les résultats du N-ème et du $N+1$-ème tirage sont les mêmes, alors il n'y a pas de nouveau changement dans la suite des lancers donc $X_{N+1} = X_N$. Sinon, il y a un changement supplémentaire et on a alors $X_{N+1} = X_N + 1$.
Ainsi, $(X_{N+1} - X_N)(\Omega) = \{0, 1\}$, ce qui prouve que la variable aléatoire $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$p = \mathbb{P}(X_{N+1}-X_N=1) = 1 - \mathbb{P}(X_{N+1}-X_N=0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Finalement, $\boxed{X_{N+1} - X_N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$

```
import numpy.random as rd
def Bernoulli():
    a=rd.random()
    if a<0.5:
        return 1
    else:
        return 0
```

(e) Puisque $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, alors

$$\mathbb{E}(X_{N+1} - X_N) = \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs, par linéarité de l'espérance, on sait que

$$\frac{1}{2} = \mathbb{E}(X_{N+1} - X_N) = \mathbb{E}(X_{N+1}) - \mathbb{E}(X_N)$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(X_{N+1}) = \dfrac{1}{2} + \mathbb{E}(X_N)}$.

La suite $(\mathbb{E}(X_N))_{N\geqslant 2}$ est donc une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $N \geqslant \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{E}(X_N) = \mathbb{E}(X_2) + \dfrac{N-2}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{N-2}{2}$ donc $\boxed{\mathbb{E}(X_N) = \dfrac{N-1}{2}}$.

5. (a) D'après les questions 4.b) et c), on a pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\mathbb{P}((X_{N+1} - X_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_N = k) = \mathbb{P}(X_{N+1} - X_N = 0) \times \mathbb{P}(X_N = k),$$

ce qui prouve que les événements $(X_{N+1} - X_N = 0)$ et $(X_N = k)$ sont indépendants pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$.

D'après une propriété du cours, ceci implique que pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, les événements $(X_N = k)$ et $\overline{(X_{N+1} - X_N = 0)} = (X_{N+1} - X_N = 1)$ sont également indépendants.

On a donc bien montré que

$$\boxed{\text{pour tout}\, i \in \{0,1\}, \text{pour tout}\, k \in [\![0, N-1]\!], (X_{N+1} - X_N = i)\, \text{et}\, (X_N = k)\, \text{sont indépendants}}$$

(ce qui signifie que les variables aléatoires $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes).

(b) Montrons par récurrence que pour tout $N \geqslant 2, X_N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N-1, \dfrac{1}{2}\right)$.

•**Initialisation :** Pour $N = 2$, on a vu que $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \mathcal{B}\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, ce qui prouve la propriété au rang $N = 2$.

•**Hérédité :** Soit $N \geqslant 2$. Supposons que $X_N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N-1, \dfrac{1}{2}\right)$ (en particulier $X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$) et montrons que $X_{N+1} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \dfrac{1}{2}\right)$.

On sait déjà que $X_{N+1}(\Omega) = [\![0, N]\!]$. D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(X_{N+1} - X_N = i)_{0\leqslant i\leqslant 1}$, on a pour tout $k \in [\![0, N]\!]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{N+1} = k) &= \mathbb{P}((X_{N+1} - X_N = 0) \cap (X_{N+1} = k)) + \mathbb{P}((X_{N+1} - X_N = 1) \cap (X_{N+1} = k)) \\
&= \mathbb{P}((X_{N+1} - X_N = 0) \cap (X_N = k)) + \mathbb{P}((X_{N+1} - X_N = 1) \cap (X_N = k-1))
\end{aligned}$$

— Si $k = 0$, on a déjà vu en question 3 que

$$\mathbb{P}(X_{N+1} = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^N = \binom{N}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{N-0}.$$

— Si $k=N$, alors $(X_N=N)=\emptyset$ donc

$$\mathbb{P}(X_{N+1}=N)=\mathbb{P}((X_{N+1}-X_N=1)\cap(X_N=N-1)).$$

D'après la question précédente, les événements $(X_{N+1}-X_N=1)$ et $(X_N=N-1)$ sont indépendants donc

$$\mathbb{P}(X_{N+1}=N)=\mathbb{P}(X_{N+1}-X_N=1)\times\mathbb{P}(X_N=N-1)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_N=N-1).$$

Puisque $X_N\hookrightarrow\mathcal{B}\left(N-1,\frac{1}{2}\right)$, alors

$$\mathbb{P}(X_N=N-1)=\binom{N-1}{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1-(N-1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

donc

$$\mathbb{P}(X_{N+1}=N)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{N}=\binom{N}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-N}.$$

- Enfin, si $k\in[\![1,N-1]\!]$, alors $k-1\in[\![0,N-2]\!]\subset[\![0,N-1]\!]$. D'après la question précédente, les événements $(X_{N+1}-X_N=0)$ et $(X_N=k)$ d'une part, et $(X_{N+1}-X_N=1)$ et $(X_N=k-1)$ d'autre part sont indépendants donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{N+1}=k) &= \mathbb{P}(X_{N+1}-X_N=0)\times\mathbb{P}(X_N=k)+\mathbb{P}(X_{N+1}-X_N=1)\times\mathbb{P}(X_N=k-1)\\
&= \frac{1}{2}\binom{N-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1-k}+\frac{1}{2}\binom{N-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1-(k-1)}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}\left(\binom{N-1}{k}+\binom{k-1}{N-1}\right)\\
&= \binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k\in[\![0,N]\!],\mathbb{P}(X_{N+1}=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}$, ce qui prouve que $X_{N+1}\hookrightarrow\mathcal{B}\left(N,\frac{1}{2}\right)$.

On a donc bien montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } N\geqslant 2, X_N\hookrightarrow\mathcal{B}\left(N-1,\frac{1}{2}\right).}$

```
def Binomiale(N):
    S=0
    for k in range(N-1):
        S+=Bernoulli()
    return S
```

(c) D'après le cours, on en déduit que $V(X_N)=(N-1)\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)$ d'où $\boxed{V(X_N)=\frac{N-1}{4}.}$

6. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Le premier changement peut apparaître au deuxième lancer, le deuxième changement au troisième lancer et ainsi de suite. On en déduit que le k-ème changement peut apparaître à partir du $k+1$-ème lancer. Ainsi, $\boxed{Y_k(\Omega)=[\![k+1,+\infty[\![.}$
Soit $i\in[\![k+1,+\infty[\![$.

L'événement $(Y_k = i)$ est réalisé si le k-ème changement a lieu au i-ème lancer, ce qui signifie qu'après le $(i-1)$-ème lancer, $k-1$ changements avaient eu lieu et qu'après le i-ème lancer, k changements ont eu lieu.
On a alors

$$\mathbb{P}(Y_k = i) = \mathbb{P}((X_{i-1} = k-1) \cap (X_i = k)) = \mathbb{P}((X_{i-1} = k-1) \cap (X_i - X_{i-1} = 1)).$$

Si $k = 1$ et $i = 2$, on a $\mathbb{P}(Y_1 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
Sinon, on aura $i - 1 \geqslant 2$ et d'après la question 5.a), les événements $(X_{i-1} = k-1)$ et $(X_i - X_{i-1} = 1)$ sont indépendants donc

$$\mathbb{P}(Y_k = i) = \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1) \times \mathbb{P}(X_i - X_{i-1} = 1) = \binom{i-2}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-2} \times \frac{1}{2}$$

donc

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ pour tout } i \in [\![k+1, +\infty[\![, \mathbb{P}(Y_k = i) = \binom{i-2}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}}$$

(on remarque la formule est également valable pour $k = 1$ et $i = 2$).