Lycée Fénelon
Année 2024-2025

BCPST1
A. Panetta

Devoir surveillé de mathématiques n°5

Samedi 8 février 2025 (4h00)

L'énoncé est constitué de trois exercices, deux problèmes et comporte 5 pages.
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.
Les résultats doivent être encadrés.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1 : Informatique

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Dans tout cet exercice, on s'interdira le recours à la bibliothèque `numpy`.

1. Définir sur `Python` la matrice A comme une liste de listes.
2. Quelle commande utiliser pour obtenir le cœfficient en ligne 2 et colonne 3 de la matrice A ?
3. Ecrire une fonction `produit` qui prend en paramètre une matrice B et renvoie le produit AB s'il est bien défini, ou « le produit n'est pas défini »le cas échéant.

Les questions 4 de l'Exercice 2, 4.d) et 5.b) du problème 2 compteront également dans la note d'informatique.

Exercice 2 : La part du lion

Dans la savane, les lionnes chassent des gazelles et des zèbres pour le lion. La population de gazelles et de zèbres est suffisamment importante pour que la proportion de chaque espèce reste stable malgré la chasse. La probabilité pour que les lionnes ramènent une gazelle est de 2/3, celle pour qu'elles rapportent un zèbre est de 1/3. Les repas du lion ne sont composés que d'une proie à chaque fois. On suppose que la composition d'un repas est indépendante des repas précédents. On observe le lion sur une assez longue période.

Pour $n \geqslant 1$, on appelle G_n l'événement : « le lion a mangé une gazelle au n-ème repas observé »et Z_n l'événement : « le lion a mangé un zèbre à ce n-ème repas ».

Pour $n \geqslant 2$, on note E_n l'événement « le lion a mangé une gazelle deux fois de suite, pour la première fois, aux $(n-1)$-ème et n-ème repas »et l'on pose $u_n = \mathbb{P}(E_n)$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on considère l'événement E_{n+2}^k :« entre le k-ème jour et le $(n+2)$-ème jour, le lion a mangé une gazelle deux fois de suite, pour la première fois, aux $(n+1)$-ème et $(n+2)$-ème repas ». On a donc $E_{n+2}^1 = E_{n+2}$.
   Soit $n \geqslant 2$.
   (a) Justifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{P}(E_{n+2}^k) = u_{n-k+3}$.
   (b) Décrire l'événement E_{n+2} à l'aide des événements Z_1, Z_2, G_1, E_{n+2}^2 et E_{n+2}^3.
   (c) Exprimer $\mathbb{P}_{Z_1}(E_{n+2})$ et $\mathbb{P}_{G_1}(E_{n+2})$ à l'aide de u_{n+1} et u_n.
   (d) En déduire que
   $$u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n.$$
3. Déterminer u_0 et u_1 pour que la relation précédente soit vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
4. Ecrire une fonction `Python` qui prend en entrée un entier naturel `n` et renvoie la valeur de u_n.
5. Exprimer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : Détection du paludisme

Une population de N individus est répartie en n groupes de k personnes chacun (donc $N = nk$). On suppose que dans cette population, la probabilité d'être porteur de Plasmodium falciparum (le parasite responsable de la forme la plus sévère du paludisme) est égale à $p \in]0, 1[$.

On dispose d'un test permettant d'établir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le parasite.
Pour éviter d'effectuer N tests (un par individu), on procède de la manière suivante :
• pour chacun des N individus, on prélève un échantillon de sang et l'on répartit ces N prélévements selon n groupes prédéfinis $G_1, G_2, \ldots, G_n$ (chaque groupe contenant k prélévements) ;
• pour chaque groupe G_i, on extrait du sang de chacun des k prélévements que l'on mélange pour obtenir un échantillon H_i ;
• on teste tous les échantillons $H_1, H_2, \ldots, H_n$: si le test de H_i est négatif, aucun des individus du groupe G_i n'est porteur du parasite et si le test H_i est positif, on teste un à un les k prélévements du groupe G_i pour détecter les individus infectés.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de groupes G_i pour lesquels le test de H_i est positif et T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués par cette méthode.

1. (a) Pour un groupe G_i donné, déterminer la probabilité que le test de H_i soit positif.
   (b) Reconnaître la loi de X, puis donner son espérance et sa variance.
2. (a) Exprimer T en fonction de n, k et X.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de T en fonction de n et p.
3. (a) Que représente la variable aléatoire $nk - T$? Déterminer $\mathbb{E}(nk - T)$.
   (b) Soit $q \in]0,1[$. Etablir le tableau de variation de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xq^x - 1 \end{array}.$$

   (c) Dans la province d'Isfahan en Iran, la proportion d'individus infectés vaut $p = 0,092$. Pour des raisons techniques, le nombre de groupes n est préalablement fixé à une valeur $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la valeur optimale de k (c'est à dire la valeur k pour laquelle $n_0 k - T$ est maximale en moyenne) ?

Problème 1 : Des bactéries et une molécule mutagène

On étudie trois bactéries, qui peuvent exister en deux versions : mutante et normale. Notre boîte de Petri contient initialement deux individus normaux et un individu mutant.
Chaque jour (sans limite a priori), on injecte une molécule mutagène dans la boîte. On considère que la quantité injectée va atteindre (chaque jour) un individu et un seul, pris au hasard.

— Si cet individu est mutant, cela ne change rien.

— Si cet individu est normal, alors il devient mutant.

Pour tout entier naturel n non nul , on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre d'individus normaux présents dans la boîte à la fin de la n-ième journée. On a donc $Y_0 = 2$.
On notera pour chaque entier naturel k non nul les événements suivants :
N_k :« Lors de la k-ième journée, le mutagène a atteint un individu normal. »
M_k : « Lors de la k-ième journée, le mutagène a atteint un individu mutant. »

1. Donner la loi de probabilité de Y_1.
2. Quelles sont les valeurs possibles de Y_n dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 ?
3. Calculer pour tout entier naturel non nul n , $\mathbb{P}(Y_n = 2)$.
4. On pose pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.
   (a) Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \dfrac{2}{3}$.

(b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable Y_n , montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$. Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?

(c) On pose pour tout entier naturel n non nul, $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique.
En déduire la valeur de u_n pour tout entier naturel non nul n.

5. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $(Y_n = 1)$ en fonction des événements M_k et N_k, et retrouver sa probabilité.
6. Déduire des résultats précédents $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ pour tout entier naturel non nul n.
7. Calculer l'espérance de Y_n pour tout entier naturel n non nul.
   Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n)$? Interpréter le résultat.
8. (Question bonus) On note Z la variable aléatoire égale au numéro du jour où le dernier individu normal a muté.

   (a) Donner $Z(\Omega)$.

   (b) Soit $k \geqslant 2$ un entier. Exprimer l'événement $(Z = k)$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1}.

   (c) En déduire la loi de Z.

Problème 2 : Autour de pile ou face

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur lance une pièce équilibrée une infinité de fois. On note X_N la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents : c'est le « nombre de changements » au cours des N premiers lancers.
Par exemple, si les 9 premiers lancers donnent : Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile, alors $X_1 = X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = X_6 = X_7 = 3, X_8 = X_9 = 4$.
Pour tout entier n compris entre 1 et N, on notera P_n l'événement « le n-ième lancer donne Pile » et F_n l'événement « le n-ième lancer donne Face ».

1. Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$.
2. Déterminer les lois de X_2 et X_3 ainsi que leur espérance.
3. Montrer que $\mathbb{P}(X_N = 0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $\mathbb{P}(X_N = 1) = (N-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}$.
4. (a) Justifier que pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$: $\mathbb{P}_{(X_N=k)}(X_{N+1} = k) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) En déduire que pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$
   $$\mathbb{P}((X_{N+1} - X_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_N = k).$$

   (c) En sommant la relation précédente de $k = 0$ à $N-1$, montrer que
   $$\mathbb{P}(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}.$$

   (d) Justifier que la variable aléatoire $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli puis écrire une fonction `Python` qui simule la variable aléatoire $X_{N+1} - X_N$. On aura au préalable importé la bibiliothèque `numpy` par la commande `import numpy as rd`.

(e) En déduire que $\mathbb{E}(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + \mathbb{E}(X_N)$ puis donner l'expression de $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N.

5. (a) Montrer que pour tout $i \in \{0, 1\}$ et pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, les événements $(X_{N+1} - X_N = i)$ et $(X_N = k)$ sont indépendants.

   (b) En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(N-1, \frac{1}{2}\right)$.

   Ecrire une fonction `Python` qui simule la variable aléatoire X_N.

   (c) Donner la variance de X_N.

6. (Question bonus) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Y_k le rang d'apparition du k-ième changement. En reprenant l'exemple de l'introduction, on aurait ainsi : $Y_1 = 3, Y_2 = 4, Y_3 = 5$ et $Y_4 = 8$ (pour Y_5, on ne sait pas puisqu'on n'a pas la suite de la liste.)

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, indiquer la loi de Y_k.