Devoir maison n°11
A rendre pour le Mardi 4 mars 2025

# Une suite définie par récurrence

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application $f$ définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = e^{ax}.$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n). \end{cases}$$

## Partie I

Soit $h$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
   (b) Déterminer la fonction dérivée $h'$ de $h$.
   (c) Etablir le tableau de variation de $h$.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$ en discutant selon les valeurs de $a$.

## Partie II

On suppose dans cette partie que $a \geqslant 0$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Justifier que $f$ est monotone et préciser sa monotonie.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. On suppose que $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{e}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $e$. Qu'en conclure ?
5. On suppose que $a > \frac{1}{e}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

## Partie III

On suppose dans cette partie que $a < 0$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Justifier que $f$ est monotone et préciser sa monotonie.
3. (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$.
   (b) Démontrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
   (c) Démontrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de limites appartenant à $[0, 1]$.

4. Démontrer que pour tout $x \in ]0,1[$:

$$(f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right) = 0.$$

Dans toute la suite, on suppose $-e < a < 0$.

5. On note $g$ la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$g(x) = ax - \ln\left(\frac{\ln(x)}{a}\right).$$

   (a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout $x \in ]0,1[$.
   (b) En déduire les variations de la fonction $g$.
   (c) Montrer que $g$ réalise une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que l'équation $(f \circ f)(x) = x$ possède une unique solution dans l'intervalle fermé $[0,1]$.
7. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.