16

Dérivation des fonctions réelles

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel.

16.1 Dérivée

16.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1: Nombre dérivé et fonction dérivée

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

• Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Dans ce cas, on note

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On dit que $f'(a)$ est le nombre dérivé de la fonction f au point a.

• On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en chaque point de I.

On note alors $f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$ la fonction dérivée de f.

Remarque 1. • En physique, on note également $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ au lieu de $f'(a)$.

• On a la définition équivalente suivante : f est dérivable en a si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite.

L'équivalence des deux définitions est immédiate en posante $h = x - a$.

Exemple 1. Soient $(m, p) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f : x \longmapsto mx + p$ une fonction affine. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = m$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{mx + p - ma - p}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{m(x - a)}{x - a} = m.$$

Remarque 2. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ tel que f est dérivable en a. Pour tout $x \in I$, la droite qui relie les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$, qui appartiennent à la courbe représentative de f, a pour pente $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Quand le point x tend vers a, cette droite tend vers la tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$, ce qui permet d'interpréter géométriquement $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

comme le cœfficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$. Ainsi, si $f'(a) = 0$, alors la tangente est horizontale.

Si f n'est pas dérivable en a et si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, alors la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point $(a, f(a))$.

Par exemple, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc la courbe représentative de la fonction racine carrée possède une tangente verticale en l'origine.

Proposition 1: Equation de la tangente

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable en a.
L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$ est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Démonstration. On a vu que le cœfficient directeur de la tangente est $f'(a)$. Ainsi, son équation est de la forme $y = f'(a)x + b$, où b est une constante à déterminer. Puisque la tangente passe par le point $(a, f(a))$, on a $f(a) = f'(a)a + b$ d'où $b = f(a) - af'(a)$.

Ainsi, l'équation de la tangente est

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a) = f'(a)(x-a) + f(a).$$

■

Exemple 2. • La tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point $(0, 1)$ a pour équation $y = x + 1$.

• La tangente à la courbe représentative de la fonction logarithme néperien au point $(1, 0)$ a pour équation $y = x - 1$.

• La tangente à la courbe représentative de la fonction sinus en l'origine a pour équation $y = x$.

• La tangente à la courbe représentative de la fonction cosinus en $(0, 1)$ est horizontale et a pour équation $y = 1$.

Définition 2: Nombre dérivé à droite, nombre dérivé à gauche

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

• On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

On note alors $f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

• On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

On note alors $f'_g(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Proposition 2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que a n'est pas une des bornes de I, i.e. il existe $r > 0$ tel que $[a-r, a+r] \subset I$.
La fonction f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
On a dans ce cas $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Démonstration. On introduit la fonction T_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par $T_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

• Supposons que f est dérivable en a. Alors $\lim_{x\to a} T_a(x) = f'(a)$.

On en déduit que $\lim_{x\to a^-} T_a(x) = f'(a)$ et $\lim_{x\to a^+} T_a(x) = f'(a)$, ce qui assure que f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

• Supposons que f est dérivable à gauche et à droite en a et que $f'_g(a) = f'_d(a)$. Alors $\lim_{x\to a^-} T_a(x) = \lim_{x\to a^+} T_a(x) = f'_g((a) = f'_d(a) = l$. Puisque T_a n'est pas définie en a, ceci implique que $\lim_{x\to a} T_a(x) = l$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{x\to a^-} T_a(x) = l$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a-\alpha, a[, |T_a(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Puisque $\lim_{x\to a^+} T_a(x) = l$, il existe $\alpha' > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]a, a+\alpha'], |T_a(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Posons $\delta = \min(\alpha, \alpha')$. Alors pour tout $x \in I \cap [a-\delta, a+\delta], |T_a(x) - l| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim_{x\to a} T_a(x) = l$.

On en déduit que f est dérivable en a de dérivée $f'(a) = l = f'_g(a) = f'_d(a)$. ■

Exemple 3. Considérons f la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x < 0, f(x) = -x$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et pour tout $x < 0, f'(x) = -1$.

Pour tout $x > 0, f(x) = x$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0, f'(x) = 1$.

Montrons que f n'est pas dérivable en 0.

On a $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$.

De même, $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

Puisque $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, on en déduit que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Enfin, le résultat suivant est très pratique et est une première incursion dans le domaine des développements limités :

Proposition 3: Existence d'un développement limité d'ordre 1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est dérivable en a.
2. Il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et un réel A tels que pour tout $x \in I, f(x) = f(a) + A(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$.

Dans ce cas, on a $A = f'(a)$.

Démonstration. • Montrons que 1) $\Rightarrow$ 2). Supposons que f est dérivable en a.

Posons pour tout $x \in I, \varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$

Puisque f est dérivable en a, on a

$$\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0 = \varepsilon(a).$$

Par ailleurs, on a bien $f(a) + f'(a)(a-a) + (a-a)\varepsilon(a) = f(a)$ et pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$f(a)+f'(a)(x-a)+(x-a)\varepsilon(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+(x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right) = f(x),$$

donc pour tout $x \in I, f(x) = f(a) + A(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec $A = f'(a)$.

On a donc bien montré que 1) $\Rightarrow$ 2).

• Montrons que 2) $\Rightarrow$ 1).

On suppose qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et un réel A tels que pour tout $x \in I, f(x) = f(a) + A(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$. On a alors pour $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A + \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$$

donc f est dérivable en a et $f'(a) = A$. ■

On en déduit le lien suivant fondamental entre dérivation et continuité :

Corollaire 1: Dérivabilité implique continuité

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$.
Alors f est continue en a.
Ainsi, si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Démonstration. On suppose que f est dérivable en a. D'après la proposition précédente, il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et vérifiant pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x).$$

On a alors immédiatement $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, ce qui prouve la continuité de f en a. ■

Exemple 4. La réciproque est fausse : en effet, la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ (donc en particulier en 0) mais n'est pas dérivable en 0.

De même, la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$ (donc en particulier en 0) mais n'est pas dérivable en 0.

Corollaire 2: Dérivation des fonctions constantes

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction constante sur I.
Alors f est dérivable sur I et pour tout $a \in I, f'(a) = 0$.

Démonstration. Soit $a \in I$. Puisque f est constante sur I, alors on a pour tout $x \in I$

$$f(x) = f(a) = f(a) + A(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$$

où $A = 0$ et ε est la fonction identiquement nulle sur I (on a donc bien $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$).

D'après la proposition précédente, ceci implique que f est dérivable en a et que

$$f'(a) = A = 0.$$

Ceci est valable en tout point $a \in I$, d'où le résultat.

■

Remarque 3. On verra plus loin que la réciproque est vraie, à savoir que si une fonction est dérivable sur un intervalle de dérivée nulle, alors la fonction est constante sur cet intervalle.

16.1.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 4: Opérations sur les dérivées

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que f et g sont dérivables en a.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et
$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$
2. La fonction fg est dérivable en a et
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
3. Supposons que $g(a) \neq 0$.
Alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$
En particulier la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

Démonstration.

1. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$\lim_{x\to a} \frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a)}{x - a} = \lambda \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \mu \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lambda f'(a) + \mu g'(a) \in \mathbb{R}.$$
2. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a
$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = g(x)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$
Par produit de limites, on a $\lim\limits_{x\to a} g(x)\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = g(a)f'(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(a)\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = f(a)g'(a)$. Par somme on en déduit que fg est dérivable en a et que
$$(fg)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
3. On suppose que $g(a) \neq 0$. Soit $\varepsilon = \dfrac{|g(a)|}{2} > 0$.
Puisque g est dérivable en a, alors g est continue en a donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $|g(x) - g(a)| \leqslant \dfrac{|g(a)|}{2}$ d'où, pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$,
$$|g(x)| \geqslant |g(a)| - |g(x) - g(a)| \geqslant |g(a)| - \frac{|g(a)|}{2} = \frac{|g(a)|}{2} > 0,$$
ce qui assure que pour tout $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$, $|g(x)| > 0$, d'où $g(x) \neq 0$.

Il est donc légitime de définir $\dfrac{f}{g}$ sur $I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$ et pour tout $x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$,

$$\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x-a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)} = \frac{1}{g(x)g(a)}\left(g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right).$$

Puisque g est dérivable en a, g est continue en a donc $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a) \neq 0$ d'où $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)g(a)} = \dfrac{1}{g(a)^2}$.

Puisque f et g sont dérivables en a, on a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$ donc finalement $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x-a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Enfin, dans le cas particulier où f est la constante égale à 1, la fonction f' est identiquement nulle donc

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

■

Exemple 5. La fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Proposition 5: Dérivation d'une fonction composée

Soit $f : I \longrightarrow J$, soit $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
On suppose que f est dérivable en a et que g est dérivable en $f(a)$.
Alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

Démonstration. Puisque f est dérivable en a, il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et telle que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x).$$

De même, puisque g est dérivable en $f(a)$, il existe une fonction $\delta : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to f(a)} \delta(x) = 0$ et telle que pour tout $x \in J$,

$$g(x) = g(f(a)) + g'(f(a))(x-f(a)) + (x-f(a))\delta(x).$$

Puisque pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$, on a pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x)-f(a)) + (f(x)-f(a))\delta(f(x)) \\
&= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)) + (f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x))\delta(f(x)) \\
&= g \circ f(a) + f'(a)g'(f(a))(x-a) + (x-a)[g'(f(a))\varepsilon(x) + \delta(f(x))(f'(a)+\varepsilon(x))].
\end{aligned}$$

Posons pour tout $x \in I, \alpha(x) = g'(f(a))\varepsilon(x) + \delta(f(x))(f'(a) + \varepsilon(x))$.

Par hypothèse, on a $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

De plus, puisque f est dérivable en a, donc continue en a, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Par hypothèse, $\lim_{x \to f(a)} \delta(x) = 0$ donc par composition de limites, $\lim_{x \to a} \delta(f(x)) = 0$.

Ainsi, on a $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

On a donc prouvé l'existence d'une fonction $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$ et telle que pour tout $x \in I, g \circ f(x) = g \circ f(a) + f'(a)g'(f(a))(x-a) + (x-a)\alpha(x)$.

D'après la proposition 3, on en déduit que $g \circ f$ est dérivable en a et que

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

■

Corollaire 3: Dérivation de fonctions composées

Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u^n est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$,
$$(u^n)'(x) = nu'(x)u(x)^{n-1}.$$
2. Si u est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$,
$$\left(\frac{1}{u^n}\right)'(x) = -\frac{nu'(x)}{u^{n+1}(x)}.$$
3. La fonction $\exp \circ u$ est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$,
$$(\exp \circ u)'(x) = u'(x)\exp(u(x)).$$
4. Si u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, alors $\sqrt{u}$ et $\ln(u)$ sont dérivables sur I et on a pour tout $x \in I$,
$$(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{et} (\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$
5. Les fonctions $\cos \circ u$ et $\sin \circ u$ sont dérivables sur I et on a pour tout $x \in I$,
$$(\cos \circ u)'(x) = -u'(x)\sin(u(x)) \quad \text{et} (\sin \circ u)'(x) = u'(x)\cos(u(x)).$$

Démonstration. Ceci découle de la proposition précédente et des dérivées des fonctions usuelles. ■

Proposition 6: Dérivation d'une fonction réciproque

Soient I et J des intervalles réels. Soit $f : I \longrightarrow J$ une application continue sur I, strictement monotone et bijective de bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$.
Soit $a \in I$ tel que f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$.
Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Ainsi, si f est dérivable sur I alors pour tout $x \in J$, f^{-1} est dérivable en x si et seulement si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ et dans ce cas, on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Démonstration. Soit $a \in I$ tel que f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$. Montrons que f^{-1} est dérivable en $f(a)$.

Posons $X = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(X) = x$.

D'après le théorème de la bijection, puisque f est continue et strictement monotone sur I alors f^{-1} est également continue sur J donc $\lim\limits_{x \to f(a)} f^{-1}(x) = f^{-1}(f(a)) = a$. Ainsi, quand $x = f(X)$ tend vers $f(a)$, alors $X = f^{-1}(x)$ tend vers a d'où

$$\lim_{x \to f(a)} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(f(a))}{x - f(a)} = \lim_{x \to f(a)} \frac{f^{-1}(x) - a}{x - f(a)} = \lim_{X \to a} \frac{X - a}{f(X) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

■

Rappelons que la bijection réciproque de $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Corollaire 4: Dérivée de la fonction arctan

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$ donc d'après la proposition précédente, arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. ■

Remarque 4. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = \arctan'(0) = 1$.

On en déduit que $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$.

16.1.3 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 3: Dérivée n-ème

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On appelle dérivée n-ème de f en a le nombre :
• $f^{(0)}(a) = f(a)$ et $f^{(0)} = f$ si $n = 0$;
• $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$ si $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable en a si $n \geqslant 1$. On dit alors que f est n fois dérivable en a.
On dit que f est n fois dérivable sur I si f est n fois dérivable en tout point de I et on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ème de f sur I.

Remarque 5. On a $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$...

Exemple 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : x \longmapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}$.
Alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}.$$

Définition 4: Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.
L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur I se note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Remarque 6. • $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.
• Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ alors pour tout $k \in [\![0, n]\!], f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

Exemple 7. Il existe des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Considérons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$

Tout d'abord, puisque la fonction sinus est bornée sur $\mathbb{R}$, on a bien $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^*, f$ est continue en x comme composée de fonctions continues en x.

Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par ailleurs, f est dérivable en 0 puisque

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En revanche, f' n'est pas continue en 0 car $\lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ mais $x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 puisque la fonction cosinus n'admet pas de limite en l'infini.

Ainsi, f' n'admet pas de limite en 0 donc elle n'y est pas continue.

On a donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Définition 5: Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I se note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

Exemple 8. • La fonction exponentielle, les fonctions cosinus et sinus, les fonctions puissances d'exposant entier sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

• La fonction logarithme néperien et la fonction racine carrée sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On sait que les combinaisons linéaires, produits, quotients, composées de fonctions continues (resp. dérivables) sont également continues (resp. dérivables). On a donc les mêmes propriétés pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

Proposition 7: Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

1. Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et on a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,
$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$
2. La fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
3. Si pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$ alors la fontion $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Proposition 8: Composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soient I et J deux intervalles réels. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et soit $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.
Alors la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Remarque 7. On en déduit que les combinaisons linéaires, produits, quotients et compositions de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

16.2 Théorème de Rolle et conséquences

16.2.1 Dérivée et extrema

Définition 6

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
• On dit que f admet un minimum sur I en a si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(a)$.
• On dit que f admet un maximum sur I en a si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(a)$.
• On dit que f admet un extremum sur I en a si f y admet un maximum ou un minimum.

Exemple 9. • La fonction $x \longmapsto x^2$ atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ en 0.

• La fonction sinus admet son maximum sur $[0,\pi]$ en $\frac{\pi}{2}$.

Théorème 1: Dérivée et extrema

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a, b[$. Soit $c \in]a, b[$. On suppose que f admet un extremum sur $]a, b[$ en c.
Alors $f'(c) = 0$.

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas où la fonction f admet en c un minimum sur $]a, b[$. La preuve dans le cas où f y admet un maximum est analogue.

Par hypothèse, on a donc pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geqslant f(c)$ d'où $f(x) - f(c) \geqslant 0$.

Puisque $c \in]a, b[$, alors f est dérivable à gauche et à droite en c et on a $f'(c) = f'_g(c) = f'_d(c)$.

On a $f'_g(c) = \lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$ car $f(x) - f(c) \geqslant 0$ et $x - c \leqslant 0$ pour tout $x \in]a, c[$.

D'autre part, $f'_d(c) = \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$ car $f(x) - f(c) \geqslant 0$ et $x - c \geqslant 0$ pour tout $x \in]c, b[$.

Ainsi, puisque $f'(c) = f'_g(c) = f'_d(c)$, alors $f'(c) \leqslant 0$ et $f'(c) \geqslant 0$, ce qui implique que $f'(c) = 0$. ∎

Remarque 8. • Ainsi, les extrema d'une fonction dérivable à l'intéieur d'un intervalle sont à chercher parmi les points en lesquels la dérivée s'annule.

• La réciproque est fausse. Soit $f : x \longmapsto x^3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum de f sur $\mathbb{R}$.

• Si l'extremum est atteint sur une des bornes du segment, le théorème n'est plus forcément vrai.

En effet, la fonction sin atteint son minimum sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en 0 mais $\sin'(0) = 1 \neq 0$.

16.2.2 Théorème de Rolle

Théorème 2: Théorème de Rolle

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Il y a deux cas :

• Si f est constante sur $[a, b]$, alors pour tout $c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$.

• Supposons que f n'est pas constante sur $[a, b]$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $(m, M) \in [a, b]^2$ tels que $f([a, b]) = [f(m), f(M)]$.

Puisque f n'est pas constante sur $[a, b]$, $f(m) \neq f(M)$.

Si $m \in]a, b[$, puisque f atteint son minimum en m et que f est dérivable sur $]a, b[$, alors $f'(m) = 0$.

Si $m \notin]a, b[$, alors $m \in \{a, b\}$ donc $f(m) = f(a) = f(b)$. Puisque $f(M) \neq f(m) = f(a) = f(b)$, nécessairement $M \in]a, b[$ donc comme précédemment, $f'(M) = 0$.

Dans tous les cas, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. ∎

Exemple 10. On a $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ et sin est continue sur $[0, \pi]$ et dérivable sur $]0, \pi[$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, \pi[$ tel que $\sin'(c) = 0$. En effet, $c = \dfrac{\pi}{2}$.

Remarque 9. Si f n'est pas continue sur $[a, b]$ mais seulement sur $]a, b[$ le résultat n'est plus vrai.

En effet, soit $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases} \end{array}$

La fonction f est continue sur $]0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et vérifie $f(0)=f(1)=1$ mais pour tout $x\in]0,1[, f'(x)=1\neq 0$.

Corollaire 5: Théorème des accroissements finis

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\neq b$.
Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Démonstration. Posons pour tout $x\in[a,b], g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Puisque f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Par ailleurs, $g(a)=g(b)=f(a)$.

D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$, i.e.

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

d'où $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Remarque 10. • Géométriquement, le théorème des accroissements finis affirme qu'il existe un point de la courbe situé entre $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$ tel que la tangente à la courbe en ce point soit parallèle à la corde reliant les points $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$.

• Physiquement, il sigifie que si on se déplace entre le temps $t=a$ et le temps $t=b$ d'un point $f(a)$ à un point $f(b)$ avec une vitesse moyenne $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, il existe un instant $c\in]a,b[$ pour lequel la vitesse instantée $f'(c)$ est égale à la vitesse moyenne.

• Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis sont en fait équivalents.

En effet, on peut démontrer le théorème de Rolle à partir du théorème des accroissements finis.

Sous les mêmes hypothèses, si $f(a)=f(b)$, alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

• Si la fonction f' est bornée sur $]a,b[$, on déduit du théorème des accroissements finis que

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\leqslant\sup_{x\in]a,b[}|f'(x)|,$$

dite inégalité des accroissements finis.

Exemple 11. Soit $x>0$. La fonction $f:t\longmapsto\ln(1+t)$ est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$.

Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in]0,x[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c),$$

i.e.

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{1+c}.$$

Or, pour tout $c\in]0,x[$, $\dfrac{1}{1+x}\leqslant\dfrac{1}{1+c}\leqslant 1$ donc pour tout $x>0$

$$\frac{1}{1+x}\leqslant\frac{\ln(1+x)}{x}\leqslant 1$$

d'où pour tout $x \geqslant 0$, $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ (on remarque que la formule est valable aussi pour $x = 0$).

16.2.3 Monotonie et signe de la dérivée

Théorème 3: Lien entre signe de la dérivée et monotonie

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

1. La fonction f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I, f'(x) \geqslant 0$.
2. La fonction f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I, f'(x) \leqslant 0$.
3. La fonction f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I, f'(x) = 0$.

Démonstration.

1. • Supposons que la fonction f est croissante sur I.
   Soit $c \in I$. Montrons que $f'(c) \geqslant 0$.
   (a) Supposons que c n'est pas l'extrémité droite de I.
   Puisque f est dérivable en c, alors $f'(c) = f'_d(c)$.
   On a $f'_d(c) = \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$.
   Or, pour tout $x \in I \cap]c, +\infty[, x - c \geqslant 0$ et $f(x) - f(c) \geqslant 0$ car f est croissante sur I.
   Ainsi, pour tout $x \in I \cap]c, +\infty[$, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$ donc par passage à la limite,
   $$f'_d(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$
   d'où $f'(c) \geqslant 0$.
   (b) Si c est l'extrémité droite de I, on a $f'(c) = f'_g(c)$.
   On a $f'_g(c) = \lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$.
   Or, pour tout $x \in I \cap]-\infty, c[, x - c \leqslant 0$ et $f(x) - f(c) \leqslant 0$ car f est croissante sur I.
   Ainsi, pour tout $x \in I \cap]-\infty, c[$, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$ donc par passage à la limite,
   $$f'_g(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$
   d'où $f'(c) \geqslant 0$.
   Dans tous les cas, on a bien $f'(c) \geqslant 0$ pour tout $c \in I$.
   • Supposons que pour tout $x \in I, f'(x) \geqslant 0$.
   Montrons que f est croissante sur I. Soient $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.
   Alors f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que
   $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
   i.e. $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
   Par hypothèse, on a $f'(c) \geqslant 0$ et $b - a > 0$ donc $f(b) - f(a) \geqslant 0$, i.e. $f(a) \leqslant f(b)$.
   On en déduit que la fonction f est croissante sur I.

2. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est décroissante sur } I &\Leftrightarrow -f \text{ est croissante sur } I \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, (-f)'(x) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, -f'(x) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \leqslant 0. \end{aligned}$$

3. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est constante sur } I &\Leftrightarrow f \text{ est croissante et décroissante sur } I \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \geqslant 0 \,\text{et}\, f'(x) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) = 0. \end{aligned}$$

■

Remarque 11. • La même preuve montre que si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $x \in]a, b[, f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$).

• Ce résultat n'est valable que sur un intervalle. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ mais f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ puisque $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$.

Théorème 4: Stricte monotonie et signe de la dérivée

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

1. Si pour tout $x \in I, f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
2. Si pour tout $x \in I, f'(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Démonstration.

1. Supposons que pour tout $x \in I, f'(x) > 0$. Soient $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. Puisque f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, i.e. $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
   Par hypothèse, $b - a > 0$ et $f'(c) > 0$ donc $f(b) - f(a) > 0$, i.e. $f(a) < f(b)$ ce qui implique la stricte croissance de f sur I.
2. Si pour tout $x \in I, f'(x) < 0$, alors $-f'(x) > 0$, ce qui implique que la fonction $-f$ est strictement croissante sur I, d'où la stricte décroissance de f sur I.

■

Remarque 12. • La même preuve montre que si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors si pour tout $x \in]a, b[, f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$.

• La réciproque est fausse. En effet, soit $f : x \longmapsto x^3$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(0) = 0$.

En fait, on a une réciproque partielle au théorème précédent.

Théorème 5: Stricte monotonie et signe de la dérivée

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Soit $A \subset I$ un ensemble fini.
On suppose que pour tout $x \in I \setminus A$, la fonction f est dérivable en x et $f'(x) > 0$.
Alors f est strictement croissante sur I.
Autrement dit, une fonction continue sur un intervalle et dont, sauf peut-être en un nombre fini de points, la dérivée existe et est strictement positive, est strictement croissante sur cet intervalle.

Démonstration. Soit $A = \{x_1, \dots, x_n\}$. Alors

$$I = (I \cap]-\infty, a_1]) \bigcup_{i=1}^{n-1} [a_i, a_{i+1}] \cup (I \cap [a_n, +\infty[) \, .$$

D'après le théorème précédent, f est strictement croissante sur $I \cap]-\infty, a_1]$, sur $I \cap [a_n, +\infty[$ et sur $[a_i, a_{i+1}]$. En effet, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, f est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$ et pour tout $x \in]a_i, a_{i+1}, f'(x) > 0$ (et de même sur $I \cap]-\infty, a_1]$ et sur $I \cap [a_n, +\infty[$).

De plus, puisque f est strictement croissante sur $I \cap]-\infty, a_1]$ et sur $[a_1, a_2]$, alors f est strictement croissante sur $(I \cap]-\infty, a_1]) \cup [a_1, a_2]$.

En recollant de proche en proche tous les intervalles qui dont l'union forme I, on montre que f est strictement croissante sur I. ■

Remarque 13. On a bien sûr un résultat analogue pour les fonctions strictement décroissantes dans le cas où $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

16.3 Primitives

16.3.1 Définition et propriétés

Définition 7: Primitive

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
Une primitive de f sur I est une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Exemple 12. La fonction $F : x \longmapsto x\ln(x) - x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ du logarithme néperien.

En effet, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

Proposition 9

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f sur I.
Soit $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
Alors G est une primitive de f sur I si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I, G(x) = F(x) + c$.

Démonstration. • Supposons que G est une primitive de f sur I. Alors $G - F$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I, (G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc la fonction $G - F$ est constante sur I, i.e. il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I, G(x) - F(x) = c$, donc pour tout $x \in I, G(x) = F(x) + c$.

• Supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I, G(x) = F(x) + c$.

Alors G est dérivable sur I et pour tout $x \in I, G'(x) = F'(x) = f(x)$ donc G est une primitive de f sur I. ■

Remarque 14. Autrement dit, si une fonction admet une primitive sur un intervalle, elle en admet une infinité, toutes égales à une constante additive près.

Le théorème suivant, que l'on admet provisoirement, donne une condition suffisante d'existence de primitives pour une fonction.

Théorème 6

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
Alors f admet des primitives sur I.

Remarque 15. Il se peut qu'une fonction non continue sur un intervalle y admette des primitives. En effet, on a vu que la fonction $f : \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ n'est pas continue en 0 mais admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

16.3.2 Primitives usuelles

A partir des dérivées de fonctions usuelles, on obtient les primitives usuelles suivantes (en notant F une primitive de f) :

$f(x)$	$F(x)$	Domaine
$a, a \in \mathbb{R}$	ax	$\mathbb{R}$
e^{ax} $(a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{ax+b}$	$\dfrac{1}{a}\ln(\lvert ax+b\rvert)$	$\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$
x^α, $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $\alpha\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$
a^x, $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\dfrac{1}{\ln(a)}a^x$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$

Enfin, le tableau suivant s'obtient en utilisant la formule de dérivation d'une composée de fonctions dérivables.

Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. La troisième ligne est valable si $u(I) \subset \mathbb{R}^*$ et la quatrième si $u(I) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Fonction	Primitive
$u'e^u$	e^u
$u'u^n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$

16.4 Dérivées partielles d'une fonction de deux variables

Définition 8: Dérivées partielles

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) \end{array}$ une fonction de deux variables réelles.
Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, on considère les fonctions partielles $f_{y_0} : x \longmapsto f(x, y_0)$ et $f_{x_0} : y \longmapsto f(x_0, y)$.
• On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en (x_0, y_0) si la première fonction partielle f_{y_0} est dérivable en x_0 et dans ce cas, on note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{y_0}(x_0).$$

• On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable en (x_0, y_0) si la deuxième fonction partielle f_{x_0} est dérivable en y_0 et dans ce cas, on note

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x_0}(y_0).$$

Remarque 16. • Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on dérive $f(x, y)$ par rapport à x en traitant y comme une constante.

• Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on dérive $f(x, y)$ par rapport à y en traitant x comme une constante.

Exemple 13. Soit $f : (x, y) \longmapsto x^2y^3 + 3yx - x$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f'_y(x) = 2xy^3 + 3y - 1$ et $f'_x(y) = 3x^2y^2 + 3x$.
Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 + 3y - 1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 + 3x$.
En particulier, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = -6$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 6$.