

5 – TRANSFERTS THERMIQUES

LA NATURE DU TRANSFERT THERMIQUE a longtemps été mystérieuse. Si le travail était assez bien appréhendé au début du 19^e siècle, avec une formalisation rigoureuse due au physicien français Gaspard-Gustave de CORIOLIS, il n'en était pas de même du concept de chaleur, qu'on appelle aujourd'hui le transfert thermique ou l'énergie thermique. Depuis LAVOISIER, il était admis qu'une grandeur appelée *calorique* se conservait : stockée par un corps chauffé, celui-ci pouvait la restituer. Cette grandeur avait sa propre unité : la calorie.

James JOULE a montré qu'il n'existe pas une telle grandeur conservative, mais qu'il existe deux manières différentes de transférer de l'énergie : le travail (mécanique ou électrique) et la chaleur. Par une série d'expériences historiques, il a établi l'équivalence numérique entre les deux, autrement dit la valeur de la calorie en joule. Il a également déterminé la chaleur dissipée par une résistance électrique parcourue par un courant (effet Joule). Brasseur de bière écossais désireux d'améliorer le rendement de ses machines, JOULE a vu ses premiers travaux accueillis assez fraîchement, d'autant qu'il se permettait de contredire LAVOISIER ! Sa collaboration avec KELVIN a beaucoup fait pour la reconnaissance de ses vues.

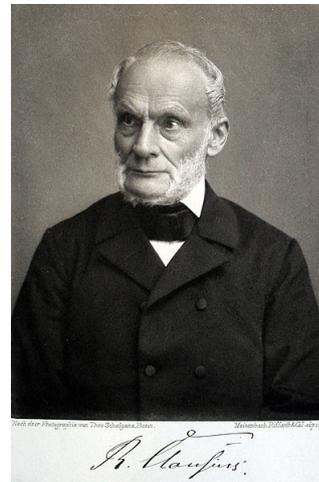
Le transfert thermique a rapidement été associé à une qualité dégradée du transfert d'énergie, qui est à la base de la définition de l'entropie par Rudolf CLAUSIUS, et de l'énoncé moderne du second principe de la thermodynamique.

Le concept de transfert thermique a été affiné tout au long du 19^e siècle avec l'établissement des lois de la conduction thermique, la loi de Fourier formellement analogue à la loi de Fick de la diffusion de particules, puis avec les lois du transfert thermique par radiation, dont la nature a été un des points de départ de la mise en place progressive de la théorie quantique.



par John COLLIER

James JOULE (1818 - 1889)
physicien britannique



Rudolf CLAUSIUS (1822 - 1888)
physicien allemand

Plan du chapitre

1	Forme désordonnée des échanges d'énergie	3
1.1	Différentes formes de transferts thermiques	3
1.2	Transfert thermique par conduction	3
1.3	Transfert thermique conducto-convectif	8
1.4	Transfert thermique par rayonnement	9
1.5	Transformation adiabatique	11
1.6	Transformation isotherme ; thermostat	12
2	Bilans de puissance	12
2.1	Bilans d'énergie et d'enthalpie en puissance	12
2.2	Évolution de la température en fonction du temps	13
2.3	Température d'équilibre d'une planète ; effet de serre	18

Programme officiel – Premier semestre – **Thème E – énergie : conversion et transfert**

NOTIONS	CAPACITÉS EXIGIBLES
E.2. Bilan d'énergie pour un système thermodynamique Transferts thermiques. Modes de transferts thermiques. Transformation adiabatique. Flux thermique conductif en géométrie unidimensionnelle ; résistance thermique. Flux thermique conducto-convectif : loi de Newton. Approche descriptive du rayonnement du corps noir. Loi de déplacement de Wien, loi de Stefan-Boltzmann.	Caractériser qualitativement les trois modes de transfert thermique : conduction, convection et rayonnement. Exploiter la relation entre flux thermique, résistance thermique et écart de température, l'expression de la résistance étant fournie. Utiliser les expressions fournies des lois de déplacement de Wien et de Stefan-Boltzmann pour expliquer qualitativement l'effet de serre.

L'auteur du présent document vous autorise à le partager, reproduire, distribuer et communiquer selon les conditions suivantes :



- BY** Vous devez le citer en l'attribuant de la manière indiquée par l'auteur (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'il approuve votre utilisation de l'œuvre).
- NC** Vous n'avez pas le droit d'utiliser ce document à des fins commerciales.
- SA** Vous avez le droit de le modifier, de le transformer ou de l'adapter, sous les mêmes conditions de partage et d'utilisation que le présent document.

Consulter la licence creative commons complète en français :
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr>

1 Forme désordonnée des échanges d'énergie

1.1 Différentes formes de transferts thermiques

On appelle **transfert thermique** tout transfert d'énergie par des **mouvements désordonnés** au niveau particulaire. C'est un transfert d'énergie difficilement utilisable : c'est une **forme dégradée** de l'énergie, le terme dégradé devant être compris par opposition au transfert d'énergie sous forme de travail, qui est facilement utilisable. Les transferts thermiques peuvent se faire selon trois modes différents.

Lorsque l'énergie thermique se propage à travers un milieu matériel séparant deux milieux de températures différentes, on parle de **conduction thermique** ; c'est ce qui explique le refroidissement d'une pièce par perte thermique à travers les murs.

L'énergie thermique peut être transférée au cours d'un mouvement d'ensemble de matière dont la température est différente de celle de son environnement. Ainsi, au cours d'une montée de lave, l'énergie est transférée de l'intérieur de la Terre vers l'extérieur, parce que la lave chaude monte et qu'elle est plus chaude que l'environnement extérieur lorsqu'elle arrive à la surface de la Terre. C'est le phénomène de **convection thermique**¹.

Enfin, l'énergie thermique peut être transférée par **rayonnement**. En effet, les corps de température non nulle émettent des photons. Ces photons sont dans le domaine de l'infra-rouge pour des températures proches de l'ambiante (être vivant, radiateur), ou dans le domaine visible si la température est plus importante (surface du Soleil, lampe). Chacun peut faire l'expérience d'énergie transférée lorsqu'on se met dans un rayon de Soleil plutôt qu'à l'ombre².

1.2 Transfert thermique par conduction

1.2.1 Flux thermique sous l'effet d'une différence de température

On a déjà discuté des conditions d'équilibre thermique : la température tend à s'uniformiser entre toutes les zones qui sont en contact thermique. En particulier, deux zones de températures T_1 et $T_2 < T_1$ en contact par l'intermédiaire d'une paroi diathermane évoluent spontanément de sorte à atteindre une température T_{eq} , intermédiaire entre les deux températures T_1 et T_2 .

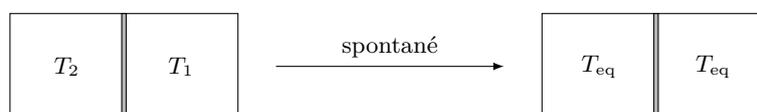


FIGURE 1 – Uniformisation de la température.

Le processus se fait par transfert d'énergie thermique à travers la paroi de séparation. À l'échelle moléculaire (improprement appelée échelle microscopique), l'uniformisation de température est due à un transfert désordonné d'énergie de proche en proche par des chocs : les molécules de fluide des deux côtés entrent en collision avec les atomes de la paroi, dont les vibrations se transmettent de proche en proche jusqu'à l'autre côté de la paroi, puis cette énergie cinétique d'agitation est transférée au fluide à l'occasion de chocs. Le processus tend statistiquement à uniformiser l'énergie cinétique à l'échelle moléculaire.

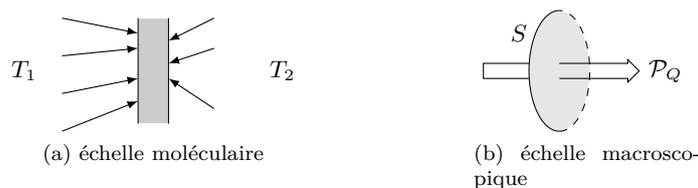


FIGURE 2 – Mécanisme d'uniformisation de la température.

1. La convection thermique étant reliée à un transfert de matière ne peut pas être étudiée dans le cadre des systèmes fermés. Elle sera abordée au second semestre et en seconde année.

2. Le phénomène de rayonnement est un mode de transfert propre à l'énergie thermique ; il ne peut être étudié théoriquement qu'en relation avec l'électromagnétisme.

Il est impossible de mener des calculs simples sur un aussi grand nombre de collisions entre particules, autrement dit l'analyse mathématique à cette échelle n'est pas faisable. Il est heureusement possible de modéliser le processus à l'échelle macroscopique : l'uniformisation de température se décrit par l'existence d'un flux d'énergie thermique (flux de chaleur) de la zone chaude vers la zone froide.

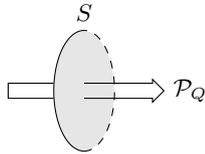


FIGURE 3 – Flux à travers une surface.

On appelle **flux thermique** à travers une surface S la quantité d'énergie thermique passant par S par unité de temps :

$$\mathcal{P}_Q = \frac{\delta Q}{dt} \quad (1)$$

Le flux thermique \mathcal{P}_Q est homogène à une puissance ; son unité est $\text{J} \cdot \text{s}^{-1} = \text{W}$.

Le transfert thermique entre une date t_1 et une date t_2 s'obtient en sommant tous les termes $\delta Q = \mathcal{P}_Q \times dt$ sur cet intervalle de temps. Comme on l'a déjà vu, cette somme s'obtient par calcul d'un intégrale entre les dates t_1 et t_2 est :

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \delta Q = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_Q dt$$

Calculons par exemple le transfert thermique en 1 h à travers un mur traversé par un flux thermique constant $\mathcal{P}_Q = 10 \text{ W}$. Appelons t_1 l'instant initial et t_2 l'instant final, tel que $t_2 - t_1 = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$. Le transfert thermique est :

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \delta Q = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_Q dt = [\mathcal{P}_Q \times t]_{t_1}^{t_2} = \mathcal{P}_Q (t_2 - t_1)$$

Numériquement, $Q = 10 \times 3600 = 36 \text{ kJ}$. Si le flux thermique est variable, il faut connaître l'expression de \mathcal{P}_Q en fonction du temps pour pouvoir calculer la primitive de \mathcal{P}_Q . Calculons par exemple le transfert thermique à travers le mur entre $t_1 = 0$ et $t_2 = 1 \text{ h}$, sachant que le flux thermique évolue avec le temps selon la loi $\mathcal{P}_Q = A e^{-t/\tau}$, avec A et τ une constante.

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_1}^{t_2} \delta Q = \int_{t_1}^{t_2} A e^{-t/\tau} dt = \left[-A \times \tau \times e^{-t/\tau} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= -A \times \tau \times \left(e^{-t_2/\tau} - e^{-t_1/\tau} \right) = A \times \tau \times \left(e^{-t_1/\tau} - e^{-t_2/\tau} \right) \end{aligned}$$

L'application numérique, avec $A = 10 \text{ W}$ et $\tau = 3 \text{ h}$, conduit à :

$$Q = 10 \times 3 \times 3600 \times \left(e^{-0/3} - e^{-1/3} \right) = 30,6 \text{ kJ}$$

Pour le même flux, calculons le transfert thermique entre $t_1 = 0$ et un temps très long. On se convainc facilement que quand t_2 devient très grand, le terme $e^{-t_2/\tau}$ devient très petit, et tend vers 0 quand $t_2 \rightarrow \infty$. Il est alors légitime de faire l'intégrale entre $t_1 = 0$ et $t_2 = \infty$, soit ³ :

$$Q = \int_0^{\infty} A e^{-t/\tau} dt = \left[-A \times \tau \times e^{-t/\tau} \right]_0^{\infty} = -A \times \tau \times \left(e^{-\infty/\tau} - e^{-0/\tau} \right) = A \times \tau$$

L'application numérique donne : $Q = 3 \times 3600 \times 10 = 108 \text{ kJ}$.

3. Ce type d'intégrale avec des bornes d'intégration infinies est tout-à-fait légitime, à condition que le résultat converge, ce qui est le cas ici.

Ce type de calcul a déjà été fait en électricité pour calculer la charge totale qui circule dans un conducteur, connaissant la loi d'évolution de l'intensité i qui est le flux de charges. On peut dresser une analogie entre la conduction thermique et la conduction électrique.

transfert thermique	électricité
puissance thermique \mathcal{P}_Q	intensité électrique i
transfert thermique Q	charge électrique q

TABLE 1 – Analogie entre flux thermique et flux de charges.

1.2.2 Expression du flux thermique en régime stationnaire

On rappelle qu'on se trouve en **régime stationnaire** lorsque les grandeurs physiques du problème sont **constantes au cours du temps**. Lorsque les grandeurs physiques du problème évoluent lentement au cours du temps, c'est-à-dire si on peut considérer que, sur un intervalle de temps assez court, elles sont quasiment constantes, on dit qu'on se trouve en **régime quasi-stationnaire**. Dans cette situation, le flux thermique a une expression simple.

Dans toute la suite, on se place dans la situation où le flux est unidirectionnel et unidimensionnel. Le flux est unidirectionnel s'il est selon une seule direction de l'espace, repérée par un vecteur unitaire constant \vec{u}_x . Le flux est unidimensionnel s'il dépend d'un seul paramètre d'espace, par exemple l'abscisse x suivant \vec{u}_x . Cela correspond typiquement aux deux situations représentées ci-dessous : transfert thermique le long d'un tube rectiligne (tuyau, poutre, clou, etc) et transfert thermique à travers une paroi plane (mur, fenêtre, etc).

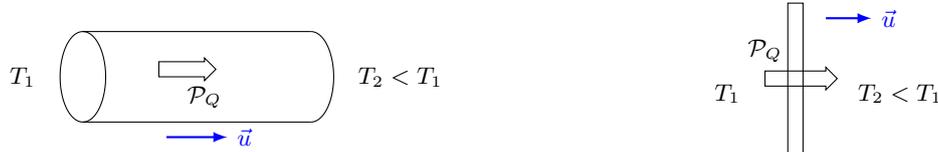


FIGURE 4 – Géométries à flux unidirectionnel et unidimensionnel.

Notons que cela n'interdit pas d'analyser des flux dans plusieurs directions de l'espace ; par exemple le flux sortant des murs d'une maison est la somme de flux à travers plusieurs parois planes. En revanche, cela ne correspond pas au flux sortant de la Terre, qui émet dans toutes les directions de l'espace (géométrie sphérique). Cela ne correspond pas non plus au flux thermique qui est émis par la surface cylindrique d'un tuyau parcouru par de l'eau chaude (symétrie cylindrique).

On constate empiriquement que le flux thermique à travers un milieu matériel séparant deux zones de températures T_1 et T_2 en régime stationnaire (T_1 et T_2 constantes) ou quasi-stationnaire (T_1 et T_2 variant très lentement) est :

$$\mathcal{P}_Q = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} \quad (2)$$

où R_{th} est la **résistance thermique** du milieu, qui s'exprime en $K \cdot W^{-1}$. Cette expression relie le flux d'énergie thermique à travers un milieu qui s'oppose à son passage à sa cause, la différence de température. L'analogie électrique est immédiate : le flux de charge (intensité) à travers un résistor est relié à sa cause (la différence de potentiel électrique) par la loi d'Ohm. On peut donc compléter l'analogie entre conduction thermique et conduction électrique.

transfert thermique	électricité
puissance thermique \mathcal{P}_Q	intensité électrique i
différence de température $T_1 - T_2$	différence de potentiel $u = V_1 - V_2$
résistance thermique R_{th}	résistance électrique R
$\mathcal{P}_Q = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}}$	$i = \frac{u}{R}$ (loi d'Ohm)

TABLE 2 – Analogie entre conduction thermique et conduction électrique.

1.2.3 Résistance thermique

Le flux thermique traversant un milieu dépend d'une part de la nature du milieu et d'autre part de sa géométrie. Il est bien connu, par exemple, qu'un manteau en fourrure est « plus chaud » qu'un manteau en coton de même épaisseur, ou qu'une couette en plumes est « plus chaude » qu'une couette en polyester de même épaisseur ; le terme « plus chaud » signifiant en physique que le flux thermique qui les traverse est moins grand. Il est par ailleurs bien connu depuis très longtemps qu'une habitation aux murs épais et aux ouvertures (portes, fenêtres) de faible surface permet de conserver une température intérieure plus élevée. En conséquence, le flux thermique qui traverse un milieu dépend d'un paramètre caractéristique de la nature du milieu et de deux paramètres géométrique : l'épaisseur L traversée par le flux et la surface S que ce milieu offre au flux.

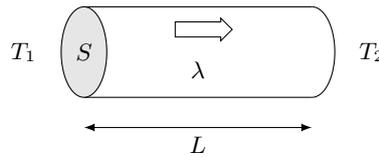


FIGURE 5 – Paramètres influençant la résistance thermique.

Par des études empiriques, on peut mettre en évidence que la résistance thermique d'un milieu d'épaisseur L et de surface S obéit à la loi :

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{L}{S} \quad (3)$$

où λ est la **conductivité thermique** du milieu traversé par le flux, qui dépend de sa nature physico-chimique. Connaissant l'unité de la résistance thermique, une analyse dimensionnelle permet d'obtenir celle de la conductivité thermique : le $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Considérons un box de sauna de largeur $\ell = 2 \text{ m}$, de longueur $L = 2,5 \text{ m}$ et de hauteur 2 m dont les parois et le plafond sont faits de planches de bois d'épaisseur $e = 20 \text{ cm}$. La conductivité thermique du bois vaut : $\lambda = 0,15 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. On peut calculer la résistance thermique des 5 parois. La surface du plafond est $\ell \times L$, celle d'un grand mur $L \times H$ (il y en a 2) et celle d'un petit mur $\ell \times H$ (il y en a aussi 2). La surface totale est donc $S = LH + \ell H + L\ell$, et la résistance thermique totale des 5 parois vaut :

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{e}{LH + \ell H + L\ell} = 5,8 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

Si ce sauna est maintenu à $T_1 = 35^\circ\text{C}$ et que l'air extérieur est à $T_2 = -10^\circ\text{C}$, le flux thermique à travers les 5 parois vaut :

$$\mathcal{P}_Q = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}} = 776 \text{ W}$$

1.2.4 Association de résistances thermiques

Du fait de l'analogie entre conduction thermique et conduction électrique, les lois d'association des résistances électriques se généralisent aux résistances thermiques. Les démonstrations sont identiques en remplaçant i par \mathcal{P}_Q et u par $T_1 - T_2$.

Deux résistances thermiques sont associées **en série** si le flux thermique les traverse l'une après l'autre. Deux résistances thermiques $R_{\text{th}1}$ et $R_{\text{th}2}$ en série sont équivalentes à une résistance thermique unique, telle que :

$$\boxed{R_{\text{th eq}} = R_{\text{th}1} + R_{\text{th}2} \quad \text{en série}} \quad (4)$$

Cette loi se généralise à un nombre quelconque N de résistances en série :

$$R_{\text{th eq}} = \sum_{j=1}^N R_{\text{th}j}$$

Une paroi en béton ($\lambda_1 = 0,92 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$) d'épaisseur $e_1 = 30 \text{ cm}$ et de surface $S = 10 \text{ m}^2$ doublée sur toute sa surface d'une épaisseur $e_2 = 10 \text{ cm}$ de laine de verre ($\lambda_2 = 0,03 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$), correspond à une association de résistances en série. En effet, le flux thermique traverse le béton puis la laine de verre. La résistance thermique du béton est :

$$R_{\text{th}1} = \frac{1}{\lambda_1} \times \frac{e_1}{S} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

et la résistance de la laine de verre est :

$$R_{\text{th}2} = \frac{1}{\lambda_2} \times \frac{e_2}{S} = 3,33 \cdot 10^{-1} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

L'association des deux résistances en série est la somme de ces deux résistances, qui est logiquement quasiment égale à la résistance de la laine de verre, qui joue bien son rôle d'isolant thermique.

$$R_{\text{th eq}} = R_{\text{th}1} + R_{\text{th}2} = \frac{1}{\lambda_1} \times \frac{e_1}{S} + \frac{1}{\lambda_2} \times \frac{e_2}{S} = 3,66 \cdot 10^{-1} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

Deux résistances thermiques sont associées **en parallèle** si le flux thermique se divise en deux parties, traversant soit l'une des résistance soit l'autre résistance. Deux résistances thermiques $R_{\text{th}1}$ et $R_{\text{th}2}$ en parallèle sont équivalentes à une résistance thermique unique telle que :

$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{th eq}}} = \frac{1}{R_{\text{th}1}} + \frac{1}{R_{\text{th}2}} \quad \text{en parallèle}} \quad (5)$$

Cette loi se généralise à un nombre quelconque N de résistances en série :

$$\frac{1}{R_{\text{th eq}}} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{R_{\text{th}j}}$$

Dans une paroi en béton ($\lambda_1 = 0,92 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$) d'épaisseur $e_1 = 30 \text{ cm}$ et de surface $S = 10 \text{ m}^2$, on perce une fenêtre de surface $S_2 = 1 \text{ m}^2$ fermée par une vitre en verre ($\lambda_2 = 1,2 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$) d'épaisseur $e_2 = 0,5 \text{ cm}$. La résistance thermique de la fenêtre est :

$$R_{\text{th}2} = \frac{1}{\lambda_2} \times \frac{e_2}{S_2} = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

La résistance thermique de la paroi en béton de surface $S_1 = S - S_2$ est :

$$R_{th1} = \frac{1}{\lambda_1} \times \frac{e_1}{S_1} = \frac{1}{\lambda_1} \times \frac{e_1}{S - S_2} = 3,62 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

La résistance thermique totale de la paroi est donc telle que :

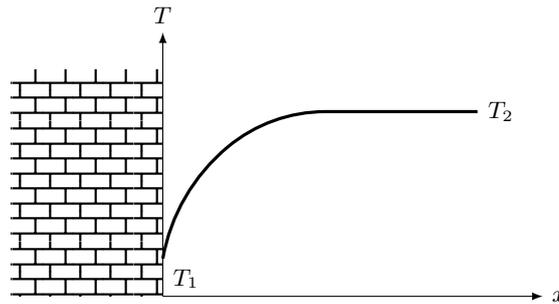
$$\frac{1}{R_{th\text{eq}}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}} \Rightarrow R_{th\text{eq}} = \frac{R_{th1} R_{th2}}{R_{th1} + R_{th2}} = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

La résistance thermique est donc du même ordre de grandeur que la plus petite des deux, ce qui est logique.

1.3 Transfert thermique conducto-convectif

À l'interface entre un solide et un fluide (gaz ou liquide), la température à la surface du solide n'est généralement pas égale à la température du fluide loin de l'interface. Par exemple, la surface du mur de séparation entre une pièce chauffée et une pièce non chauffée est plus chaude que l'air de la pièce non chauffée, comme on peut facilement s'en apercevoir en y posant la main.

Si un solide à la température T_1 est au contact d'un fluide à la température T_2 , il existe une couche d'épaisseur plus ou moins grande selon les conditions (dépendant en particulier de l'agitation du fluide)



On appelle **transfert thermique conducto-convectif** le transfert thermique entre la surface d'un solide et un fluide environnant de température différente. La puissance thermique transférée de la zone de température T_1 vers la zone de température $T_2 < T_1$ à travers la surface S en régime stationnaire est donnée par le **loi de Newton** :

$$\mathcal{P}_Q = h \times S \times (T_1 - T_2) \quad (6)$$

h est le **coefficient conducto-convectif** ou **coefficient de transmission thermique**, exprimé en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. En comparant la loi de Newton l'expression de la puissance thermique transférée par conduction (équation (2)), on remarque facilement que le terme $1/h \times S$ est homogène à une résistance thermique, qui peut se combiner avec d'autres résistances thermiques selon les lois habituelles.

Le coefficient conducto-convectif dépend :

- de la nature du solide,
- de la nature du fluide,
- et des conditions du fluide (au repos, agité, etc).

De ce fait, il est relativement difficile à calculer ou à mesurer. Il existe par exemple des formules empiriques donnant le coefficient conducto-convectif à l'interface entre le béton et l'air, qui dépendent de la vitesse du vent.

Prenons l'exemple d'un cube de fer d'arête $a = 30 \text{ cm}$ et porté à une température $T_0 = 70^\circ\text{C}$. On le pose de sorte que ses 6 faces soient au contact de l'air environnant à $T_{\text{ext}} = 20^\circ\text{C}$. Le coefficient conducto-convectif du fer à l'air immobile est $h = 5,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. On cherche l'énergie thermique évacuée par le cube en 30 s. Dans

un intervalle de temps aussi court, on peut supposer que la température du cube n'est pas modifiée, et que la puissance thermique évacuée est constante :

$$\mathcal{P}_Q = h \times 6a^2 \times (T_0 - T_{\text{ext}}) = 156,6 \text{ W}$$

Cette puissance étant constante, l'énergie thermique évacuée pendant un intervalle de temps Δt est : $Q = \mathcal{P}_Q \Delta t = 4,7 \text{ kJ}$.

1.4 Transfert thermique par rayonnement

1.4.1 Puissance totale rayonnée

Tous les corps qui ne sont pas à une température absolue nulle émettent des photons. Ceux-ci transportant de l'énergie, cette émission correspond à un transfert d'énergie. Les photons étant émis aléatoirement dans toutes les directions, il s'agit d'un transfert désordonné d'énergie. L'énergie rayonnée sous forme de photons correspond donc à un transfert thermique inévitable dès qu'un corps est à une température non nulle.

Le transfert thermique par rayonnement est bien théorisée pour des corps idéaux appelés « corps noirs », dont les caractéristiques et les propriétés sortent complètement du cadre du programme. On supposera que les systèmes physiques étudiés se comportent comme des corps noirs.

Soit un corps, assimilé à un corps noir, porté à une température T . On admet qu'une surface S de ce corps émet par rayonnement une puissance totale, aussi appelé flux énergétique total, donné par la **loi de Stefan-Boltzmann**⁴ :

$$\Phi = \sigma \times S \times T^4 \quad (7)$$

avec $\sigma = 5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ la constante de Stefan-Boltzmann. Notons que la lettre usuellement utilisée pour la puissance émise par rayonnement est Φ (flux énergétique), mais il s'agit bien d'une puissance thermique, au même titre que la puissance qu'on a notée \mathcal{P}_Q transmise par conduction ou par transfert conducto-convectif⁵.

Cette loi permet de calculer la puissance émise par le filament d'une ampoules à incandescence. Il s'agit d'un filament de tungstène, porté à haute température par effet Joule lorsqu'il est parcouru par un courant électrique. Un filament typique est un cylindre de diamètre $d = 20 \mu\text{m}$ et de longueur $L = 4 \text{ cm}$; sa température d'équilibre est de l'ordre de $2490 \text{ }^\circ\text{C}$. La puissance émise est :

$$\Phi = \sigma \times \pi \times d \times L \times T^4 = 5,6705 \cdot 10^{-8} \times \pi \times 20 \cdot 10^{-6} \times 0,04 \times (2490 + 273)^4 = 8,3 \text{ W}$$

L'énergie rayonnée par ce filament en $\Delta t = 24 \text{ h}$ est $\Phi \Delta t = 717,5 \text{ kJ}$.

4. Jozef STEFAN est un mathématicien et physicien slovène, qui a travaillé à Vienne, capitale de l'empire Austro-Hongrois, auquel la Slovénie appartenait. Il a déterminé expérimentalement la loi qui porte son nom, ainsi que celui de son élève Ludwig BOLTZMANN, un physicien de tout premier plan. Outre son travail sur l'émission du corps noir, qui relève en fait de l'électromagnétisme, STEFAN a travaillé sur des problèmes thermodynamiques toujours d'actualité et très important dans les processus industriels, comme l'évolution de l'interface entre deux phases au cours d'un changement d'état.

Ludwig BOLTZMANN est un physicien d'une envergure exceptionnelle, qui a apporté des avancées décisives dans de nombreux domaines de la physique, en particulier en thermodynamique. Il a fondé la thermodynamique statistique, qui consiste à obtenir les lois de la thermodynamique classique en effectuant un traitement statistique du comportement individuel des particules du système. Il a ainsi donné des preuves décisives de l'existence des atomes et donné une justification théorique au second principe de la thermodynamique. Il a aussi apporté des contributions majeures en électromagnétisme et en acoustique. Très bon expérimentateur, il a déterminé la valeur de certaines constantes universelles. C'était enfin un professeur exceptionnel et chaleureux ; la clarté de ses cours a été vantée par des physiciens de premier plan comme Erwin SCHRÖDINGER ou Lise MEITENER, qui les ont suivis. C'était aussi un partisan de l'admission des femmes à l'université, qui se moquait du chauvinisme scientifique qui régnait à l'époque entre l'Allemagne et l'Angleterre en particulier. Sa formule la plus fameuse $S = k_B \ln \Omega$, dans laquelle apparaît la constante qui porte son nom, est gravée sur sa pierre tombale au cimetière central de Vienne.

5. La différence de notation provient du fait que le transfert thermiques par rayonnement a été étudié dans le cadre de l'électromagnétisme où les usages sont différents de ceux du domaine de la conduction thermique.



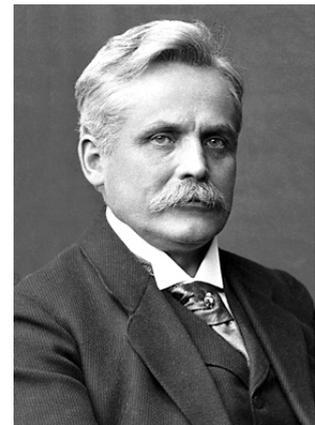
par K. SCHÖNBAUER

Jozef STEFAN (1835 - 1893)
physicien slovène



source : Universität Wien

Ludwig BOLTZMANN (1844 - 1906)
physicien autrichien

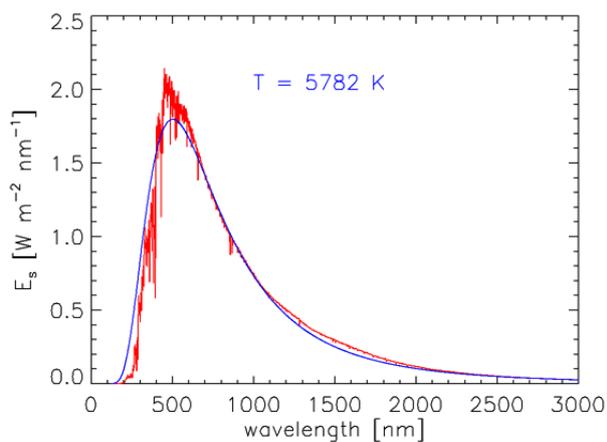


source : fondation Nobel

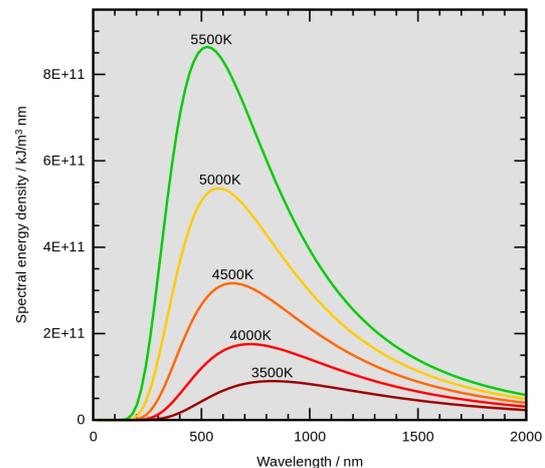
Wilhelm WIEN (1864 - 1928)
physicien allemand

1.4.2 Longueur d'onde émise

La loi de Stefan-Boltzmann donne la puissance totale rayonnée par le corps chauffé. Or, le rayonnement a lieu à toutes les longueurs d'onde, c'est-à-dire que le corps émet des photons dans une large gamme d'énergie. Cependant, le rayonnement est inégalement réparti sur les différentes longueurs d'onde, comme le montre le spectre solaire de la figure 6a.



(a) spectre solaire



(b) loi de Wien

FIGURE 6 – Spectre solaire et spectre du corps noir donné par la loi de Wien.

La **loi du déplacement de Wien**⁶ donne la puissance rayonnée par un corps de température T en fonction de la longueur d'onde (figure 6b). À partir de la loi de Wien, on peut obtenir la longueur d'onde à laquelle la puissance rayonnée est maximale :

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \quad (8)$$

6. Wilhelm WIEN a travaillé sur de nombreux domaines pour lesquels il a obtenu des résultats qui ont participé à l'élaboration progressive de la physique moderne. Il a déterminé la masse du proton et a montré qu'elle est la même que celle de l'atome d'hydrogène, relation entre masse et énergie qui est jalon dans l'élaboration de la relativité restreinte, et ses travaux sur le corps noir qui lui ont valu le prix Nobel de physique en 1911.

où $b = 2,8978 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ est la constante de Wien⁷.

Un être humain, dont la température de surface est de l'ordre de 32°C , émet un rayonnement dont le maximum est autour de $b/T = 2,8978 \cdot 10^{-3}/(32 + 273) = 9,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, soit $9,5 \mu\text{m}$, ce qui correspond au domaine des infra-rouges. C'est la raison pour laquelle certains capteurs de présence consiste en une caméra infra-rouge, ou que les militaires utilisent des jumelles infra-rouge pour les surveillances nocturnes.

1.5 Transformation adiabatique

Il peut être intéressant dans de multiples situations d'éviter les transferts thermiques, soit qu'on souhaite confiner l'énergie à l'intérieur d'un système (isolation d'un logement), soit qu'on souhaite éviter les transferts thermiques afin de maximiser les transferts ordonnés d'énergie.

Une transformation telle qu'aucun échange de chaleur n'ait lieu entre le système et le milieu extérieur est appelée une **transformation adiabatique**.

Pour réaliser une transformation adiabatique, il faut éliminer toutes les causes de transfert thermique.

- Le transfert par convection est nul si on enferme le système avec des parois ; c'est le principe des serres agricoles, dont le toit empêche la déperdition d'énergie par montée de l'air chaud.
- Le transfert par rayonnement est quasiment impossible à éliminer complètement ; au mieux il est minimisé avec des parois intérieures réfléchissantes, comme on trouve dans le vase intérieur des calorimètres, des bouteilles thermos ou des couvertures de survie.
- Il faut limiter le transfert thermique par conduction à travers les parois du système.

La puissance thermique transférée par conduction à travers un milieu (une paroi) dépend de la résistance thermique de cette paroi, selon la relation (2), dont on déduit aisément l'énergie thermique transférée par conduction entre deux milieux de température T_1 et T_2 :

$$\delta Q_{\text{reçue}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}} \times dt$$

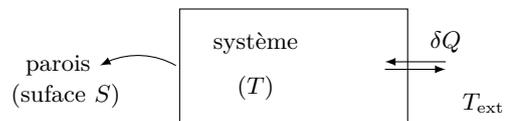


FIGURE 7 – Conduction thermique.

Il est alors évident que les échanges thermiques sont diminués dans le cas où la résistance thermique est très grande correspond, autrement dit si les parois sont **calorifugées** ou encore **athermane**.

La formule précédente montre également que les échanges thermiques sont d'autant plus importants que la durée durant laquelle on les laisse se dérouler est grande. En effet, l'énergie thermique transférée par conduction est directement proportionnelle au temps. Par voie de conséquence, on diminue les échanges thermiques en diminuant la durée des transformation.

En définitive, pour limiter les échanges thermiques par conduction, on a deux solutions :

- opérer dans un système entouré de parois de très grande résistance thermique $R_{\text{th}} \rightarrow \infty$ (parois calorifugées),
- opérer très vite de sorte que les échanges thermiques n'aient pas le temps de se faire.

Il est possible de réaliser une transformation adiabatique soit en travaillant dans une enceinte calorifugée, soit en opérant très rapidement.

7. La loi de Wien est en réalité une approximation valable aux longueurs d'onde assez courtes ; la loi générale a été énoncée ultérieurement par Max PLANCK.

1.6 Transformation isotherme ; thermostat

On s'intéresse maintenant aux conditions permettant de réaliser une transformation telle que la température du système reste constante, autrement dit une **transformation isotherme**. Pour cela, il faut que tout effet qui tend à augmenter la température du système soit compensé par une sortie d'énergie, et inversement que tout effet qui tend à diminuer la température du système soit compensé par une entrée d'énergie. Réaliser une transformation isotherme implique donc que le système puisse échanger de l'énergie avec le monde extérieur, autrement dit que ses parois soient diathermanes.

On sait d'autre part qu'un système évolue spontanément vers un équilibre de température avec le monde extérieur. En conséquence, si on souhaite que la température du système reste constante, il faut que le monde extérieur avec lequel il est en contact ait lui-même une température constante, et en particulier que T_{ext} ne soit pas affectée par la présence du système.

On appelle **thermostat** un dispositif capable en théorie de céder ou absorber une quantité infinie d'énergie, sans que sa température ne soit modifiée.

En pratique, un dispositif très grand devant la taille du système peut servir de thermostat : l'atmosphère ou l'océan pour un moteur par exemple⁸. Il peut aussi s'agir d'un fluide constamment renouvelé, comme un circuit de refroidissement alimenté en continu par une rivière ou l'air.

Le rôle du thermostat est alors de réguler la température du système au cours de la transformation, de sorte que l'équilibre thermique entre le système et le thermostat de température constante soit atteint à tout instant. Or l'équilibre thermique est lent à atteindre, donc il faut que la transformation soit elle-même lente.

Il est possible de réaliser une transformation isotherme en opérant lentement dans une enceinte aux parois diathermanes au contact avec un thermostat de température constante.

On remarquera que les conditions de réalisation d'une transformation isotherme sont exactement inverses de celles d'une transformation adiabatique, ce qui est une preuve, s'il en est besoin, qu'adiabatique et isotherme sont deux choses totalement différentes.

2 Bilans de puissance

2.1 Bilans d'énergie et d'enthalpie en puissance

Les énoncés du premier principe et du bilan enthalpique, vus dans les deux chapitres précédents, décrivent des bilans entre une date initiale et une date finale (éventuellement très proches s'il s'agit d'un énoncé infinitésimal), sans mention explicite de la durée de la transformation. Or, on a mis en évidence que les transferts thermiques sont lents, à tel point qu'on pouvait éventuellement les considérer nuls pour une transformation rapide.

Il semble donc nécessaire de formuler un bilan d'énergie ou d'enthalpie qui fasse apparaître explicitement le temps, pour pouvoir discuter de la durée des transformations. Pour cela, il suffit de partir de l'énoncé du premier principe ou du bilan enthalpique infinitésimal :

$$\begin{aligned}dE_c + dE_p + dU &= \delta W_{p_{\text{reçu}}} + \delta W_{\text{reçu}}^* + \delta Q_{\text{reçu}} \\dE_c + dE_p + dH &= \delta W_{\text{reçu}}^* + \delta Q_{\text{reçu}}\end{aligned}$$

et diviser tous les termes par dt , ce qui fait apparaître dans le membre de droite les puissances associées aux échanges d'énergie :

8. Cela fait également d'un thermostat une source quasiment inépuisable d'énergie, à condition évidemment de ne considérer que des systèmes limités en taille et des transformations limitées dans le temps.

- sous forme de travail $P_W = \delta W / dt$ (puissance mécanique),
- sous forme d'énergie thermique $P_Q = \delta Q / dt$ (puissance thermique).

Énoncé du premier principe en terme de puissance :

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} + \frac{dU}{dt} = \mathcal{P}_{W_p \text{ reçu}} + \mathcal{P}_{W^* \text{ reçu}} + \mathcal{P}_{Q \text{ reçue}} \quad (9)$$

Pour une **transformation monobare** telle que l'équilibre de pression avec l'extérieur soit réalisé à l'état initial et à l'état final, et en particulier une **transformation isobare** :

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} + \frac{dH}{dt} = \mathcal{P}_{W^* \text{ reçu}} + \mathcal{P}_{Q \text{ reçue}} \quad (10)$$

Ces deux énoncés peuvent servir, en particulier pour obtenir l'évolution de la température T d'un système au cours du temps, ou pour évaluer la durée nécessaire pour faire parvenir un système d'une température initiale à une température finale, y compris au cours d'un changement d'état. La méthode est la même que celle décrite au chapitre précédent.

2.2 Évolution de la température en fonction du temps

2.2.1 Temps de mise en chauffe d'un sauna

Dans un premier exemple, on considère le cas où les échanges d'énergie se font à puissance constante. Dans ce cas, la résolution du problème consiste en une simple intégration⁹.

Une cabine de sauna contient de l'air initialement à la température $T_1 = 20^\circ\text{C}$. On met en marche un radiateur délivrant puissance thermique constante $\mathcal{P} = 10\text{ kW}$, jusqu'à atteindre la température $T_2 = 80^\circ\text{C}$. On suppose que le système est fermé, à pression constante, et que la capacité thermique totale à pression constante de la cabine de sauna, de ses accessoires (y compris le radiateur) et de l'air intérieur est $C = 80\text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$. On cherche à estimer le temps de chauffe en supposant que les pertes thermiques à travers les parois sont négligeables.

Système. Le système est constitué de l'intérieur de la cabine et de l'air qu'elle contient. Sa capacité thermique à pression constante est C .

États extrêmes. À l'état initial, la température est T_1 et à l'état final la température est T_2 .

Transformation. La cabine de sauna est en équilibre mécanique avec l'atmosphère et reste à pression constante. Il n'y a pas de travail autre que celui des forces pressantes $W_{\text{reçu}}^* = 0$. Les seuls échanges d'énergie ont lieu au niveau du radiateur, puisqu'on néglige les échanges thermiques avec l'extérieur, soit $\mathcal{P}_{\text{reçu}} = \mathcal{P}$. Cette puissance est soit une puissance thermique (radiateur parcouru par de l'eau chaude) ou soit une puissance électrique (radiateur consistant en une résistance chauffante), mais cela revient au même dans le bilan. Il n'y a pas de variation de l'énergie mécanique, soit $dE_c / dt = dE_p / dt = 0$.

Comme on cherche à déterminer une évolution en fonction du temps, il faut utiliser le premier principe écrit sous forme de puissance, en utilisant l'enthalpie puisqu'on est à pression constante :

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} + \frac{dH}{dt} = \mathcal{P}_{W^* \text{ reçu}} + \mathcal{P}_{Q \text{ reçue}} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \mathcal{P}$$

La cabine étant constituée de parois solides et d'air assimilable à un gaz parfait, son enthalpie ne dépend que de la température, et $dH = C dT$, C étant la capacité thermique à pression constante. On en déduit l'équation reliant la température au temps :

9. Cet exemple est inspiré de l'épreuve du physique du concours G2E 2009. Il continuait en supposant l'existence de pertes thermiques à travers la paroi.

$$\frac{C \, dT}{dt} = \mathcal{P} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{C}$$

La résolution de cette équation peut se faire soit par primitivation, soit par intégration. Les deux méthodes sont équivalentes, et peuvent être utilisées indifféremment.

Méthode par primitivation. Le terme \mathcal{P}/C étant constant, la dérivée de T par rapport au temps est constante, ce qui signifie que T est une fonction affine du temps :

$$T_{(t)} = \frac{\mathcal{P}}{C} \times t + \lambda$$

expression dans laquelle il ne faut pas oublier la constante d'intégration. Celle-ci s'obtient grâce à une condition à la limite. À la date initiale, qu'on choisit nulle soit $t = 0$, la température est T_1 ; alors :

$$T_{(t=0)} = \frac{\mathcal{P}}{C} \times 0 + \lambda = T_1 \Rightarrow \lambda = T_1$$

On en déduit l'évolution de la température au cours du temps :

$$T_{(t)} = T_1 + \frac{\mathcal{P}}{C} \times t$$

On cherche la date t_2 à partir de l'instant initial à laquelle la température atteint T_2 , soit :

$$T_2 = T_1 + \frac{\mathcal{P}}{C} \times t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{T_2 - T_1}{\mathcal{P}/C}$$

L'application numérique donne $t_2 = 480 \text{ s} = 8 \text{ min}$. Ce temps est relativement court, ce qui justifie qu'on puisse, en première approximation, négliger les pertes thermiques par conduction à travers les parois.

Méthode par intégration. Cette méthode consiste à *séparer les variables*, c'est-à-dire placer dans un des membres tous les termes en T et dans l'autre tous les termes en t , qui sont les deux variables du problème¹⁰ :

$$C \, dT = \mathcal{P} \, dt$$

Les deux membres étant égaux, leurs intégrales entre l'état initial et l'état final sont égales. Pour le membre de droite, où apparaît la variable temps, les états initiaux et finaux sont la date initiale t_0 et la date finale t_2 . Pour le membre de gauche, où apparaît la variable température, l'état initial est T_1 et l'état finale est T_2 . On a donc :

$$\int_{T_1}^{T_2} C \, dT = \int_0^{t_2} \mathcal{P} \, dt$$

Comme C et \mathcal{P} sont constantes, on obtient immédiatement :

$$C(T_2 - T_1) = \mathcal{P}(t_2 - 0) \Rightarrow t_2 = \frac{C(T_2 - T_1)}{\mathcal{P}}$$

ce qui est la même expression que celle obtenue par la première méthode. Cette seconde méthode a l'avantage de donner directement le résultat final sans trouver explicitement la loi générale d'évolution de T en fonction du

10. Rappelons que la notation dT/dt peut se lire deux façons : c'est le quotient entre une petite variation de T et une petite variation de t , et c'est la dérivée de la fonction $T_{(t)}$. Comme il s'agit d'un quotient, on peut le manipuler comme un tel : le terme dt au dénominateur du membre de gauche peut passer au numérateur du membre de droite. Cette manipulation est parfaitement légitime et est théorisée dans la théorie mathématique de la différentiation, qui surpasse celle de l'intégration.

temps. L'expression de la fonction $T(t)$ peut cependant aussi se retrouver par la intégration ; il suffit d'intégrer entre l'état initial ($t = 0, T_1$) et une date quelconque t à laquelle la température est $T(t)$:

$$\int_{T_1}^{T(t)} C dT = \int_0^t \mathcal{P} dt \Rightarrow C(T(t) - T_1) = \mathcal{P}(t - 0) \Rightarrow T(t) = T_1 + \frac{\mathcal{P}}{C} \times t$$

Cette façon de procéder par intégration plutôt que par primitivation a l'énorme avantage de faire apparaître la constante d'intégration comme la borne inférieure de l'intégrale ; on ne risque donc pas de l'oublier.

2.2.2 Refroidissement à travers des parois : régime transitoire du premier ordre

Dans un second exemple, on étudie l'évolution temporelle de la température d'un système qui échange de l'énergie avec le monde extérieur par conduction thermique. L'échange d'énergie thermique est la cause de l'évolution de la température du système. Or, la puissance thermique échangée par conduction dépend de la température du système, puisqu'elle est de la forme : $\mathcal{P}_Q = \pm(T - T_{\text{ext}})/R_{\text{th}}$ (le signe étant fonction de celui de $T - T_{\text{ext}}$). En d'autre terme, la grandeur qui varie (la température) influe elle-même sur la cause de sa variation (la puissance thermique).

D'autre part, on sait que la température du système tend vers la température du monde extérieur (équilibre thermique). Au départ, lorsque $(T - T_{\text{ext}})$ est grand, la puissance thermique échangée est grande, et la température du système évolue beaucoup. Au cours du temps, la différence $(T - T_{\text{ext}})$ diminue, et la puissance thermique échangée par conduction est de plus en plus faible.

Lorsque la variation d'une grandeur physique Z dépend de façon affine de cette même grandeur, autrement dit si dZ/dt est une fonction affine de Z , on dit que Z varie selon un **régime du premier ordre**.

De très nombreux phénomènes évoluent selon un régime du premier ordre, et la résolution mathématique est la même. On en voit un premier exemple dans ce chapitre, avec l'évolution temporelle de la température d'un système¹¹. On va étudier ce type de régime d'évolution sur l'exemple du refroidissement d'une pièce par perte thermique à travers ses parois.

On considère une pièce, dont la capacité thermique à pression constante totale (air et l'ensemble des objets qui s'y trouvent) est $C = 40 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$. La température intérieure de la pièce est initialement $T_{\text{ini}} = 20^\circ\text{C}$. La pièce est séparée de l'atmosphère extérieure $T_{\text{ext}} = -5^\circ\text{C}$ par des parois dont la résistance thermique totale est $R_{\text{th}} = 3,0 \cdot 10^{-1} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

La pression de la pièce reste égale à la pression atmosphérique durant tout le processus. On cherche la loi d'évolution en fonction du temps de la température $T(t)$ de la pièce, en supposant qu'elle varie suffisamment lentement pour qu'on puisse faire l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire.

Système. Le système est constitué de l'intérieur de la pièce, tout son contenu et l'air qui s'y trouve. Sa capacité thermique à pression constante est C .

États extrêmes. À l'état initial, la température est T_{ini} et à l'état final la température est T_{ext} .

Transformation. La pièce est en équilibre mécanique avec l'atmosphère et reste à pression constante. Il n'y a pas de travail autre que celui des forces pressantes $W_{\text{reçu}}^* = 0$. Les seuls échanges d'énergie ont lieu à travers la paroi de séparation avec le monde extérieur, sous forme d'une puissance thermique. Il n'y a pas de variation de l'énergie mécanique, soit $dE_c/dt = dE_p/dt = 0$.

Comme on cherche à déterminer une évolution en fonction du temps, il faut utiliser le premier principe écrit sous forme de puissance, en utilisant l'enthalpie puisqu'on est à pression constante :

11. On rencontrera d'autres exemples de régimes transitoires du premier ordre dépendant du temps : en mécanique avec la chute d'un objet dans l'air avec des frottement, en électricité avec la charge d'un condensateur, en cinétique chimique. L'évolution avec l'altitude de la pression dans l'atmosphère est un régime transitoire du premier ordre dépendant de la position, autrement dit la variable n'est pas le temps mais la position verticale z . D'autres phénomènes bien connus mais non étudiés en BCPST obéissent à un telle loi, en particulier les désintégrations radioactives.

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} + \frac{dH}{dt} = \mathcal{P}_W^* + \mathcal{P}_Q \text{ reçu} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \mathcal{P}_Q \text{ reçu}$$

Le système étant constitué de phases condensée et d'air assimilé à un gaz parfait, la variation d'enthalpie ne dépend que de la variation de température : $dH = C dT$. Par ailleurs, il faut exprimer la puissance thermique reçue à travers la paroi ; elle est positive si le monde extérieur est plus chaud que la pièce qui reçoit alors réellement de l'énergie venant de l'extérieur, et négative dans le cas contraire où elle perd de l'énergie par conduction vers le monde extérieur. En conséquence, $\mathcal{P}_Q \text{ reçu}$ est proportionnelle à $T_{\text{ext}} - T$. En conséquence :

$$C \times \frac{dT}{dt} = \frac{T_{\text{ext}} - T}{R_{\text{th}}} \Rightarrow R_{\text{th}} C \times \frac{dT}{dt} + T = T_{\text{ext}} \Rightarrow \tau \frac{dT}{dt} + T = T_{\text{ext}} \quad (11)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, caractéristique d'un régime transitoire du premier ordre. Lorsqu'on l'écrit sous forme canonique, avec un coefficient 1 devant la fonction T , il apparaît devant le terme dT/dt une constante caractéristique du phénomène, notée usuellement τ , qui vaut ici :

$$\tau = R_{\text{th}} \times C = 12 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 3 \text{ h } 20 \text{ min}$$

Il s'agit bien d'un temps, comme une analyse dimensionnelle le montre. Le membre de gauche comporte la somme de deux termes, qui ont donc nécessairement la même unité. Comme T est en K, et que dT/dt est en $\text{K} \cdot \text{s}^{-1}$, le facteur $\tau = R_{\text{th}} C$ est homogène à un temps. Notons qu'il est également tout-à-fait autorisé d'écrire l'équation différentielle avec un coefficient 1 devant la dérivée¹², soit :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_{\text{ext}}}{\tau}$$

Lorsqu'un système évolue selon un régime transitoire du premier ordre, la variable (ici T) obéit à une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$\tau \times \frac{dT}{dt} + T = K$$

avec K une constante, et τ la **constante de temps** du phénomène (en seconde), qui ne dépend que des caractéristiques du système.

La solution de cette équation différentielle est une fonction, ici la température du système en fonction du temps : $T(t)$. Cette solution est connue en mathématiques, mais il est pertinent de l'écrire comme la somme de deux termes : la solution particulière T_p et la solution homogène T_h .

La solution particulière est de la même forme que le second membre. Si le second membre est constant, alors T_p est une fonction constante. S'il s'agit d'une fonction constante, alors sa dérivée est nulle : $dT_p/dt = 0$. Comme par ailleurs il s'agit d'une solution de l'équation différentielle, alors :

$$\tau \frac{dT_p}{dt} + T_p = T_{\text{ext}} \Rightarrow T_p = T_{\text{ext}}$$

La solution de l'équation homogène, c'est-à-dire avec un second membre nul, soit : $\tau \times dT/dt + T = 0$ est de la forme : $T_h = A e^{-t/\tau}$, avec A une constante à déterminer. On remarquera que le terme dans l'exponentielle est sans dimension, puisqu'il s'agit du rapport de deux temps.

12. Attention ! Quelle que soit la façon d'écrire l'équation différentielle, il y a toujours un signe positif entre les deux termes du membre de gauche. Dans le cas contraire, il ne s'agit pas d'un régime transitoire du premier ordre, mais d'un phénomène qui entraîne la divergence de la variable, autrement dit un phénomène de type catastrophique. En BCPST, la présence d'un signe négatif veut principalement dire qu'il y a une erreur de signe dans le raisonnement !

La solution complète est la somme :

$$T_{(t)} = T_p + T_h = T_{\text{ext}} + Ae^{-t/\tau}$$

La constante A s'obtient par une condition à la limite ; par exemple, on sait qu'à $t = 0$, $T_{(t=0)} = T_{\text{ini}}$. En conséquence :

$$T_{(t=0)} = T_{\text{ini}} \Rightarrow T_{\text{ext}} + Ae^{-0/\tau} = T_{\text{ini}} \Rightarrow A = T_{\text{ini}} - T_{\text{ext}}$$

En définitive, l'évolution de la température du système au cours du temps obéit à la loi :

$$T_{(t)} = T_{\text{ext}} + (T_{\text{ini}} - T_{\text{ext}}) \times e^{-t/\tau} \quad (12)$$

La courbe représentative de la fonction est donnée ci-dessous, avec plusieurs caractéristiques qu'il est indispensable de mettre en évidence :

- la courbe présente une asymptote horizontale,
- la tangente à l'origine n'est pas verticale, mais coupe l'asymptote à la date $t = \tau$,
- à $t = \tau$, la grandeur a varié de 63% de sa variation totale.

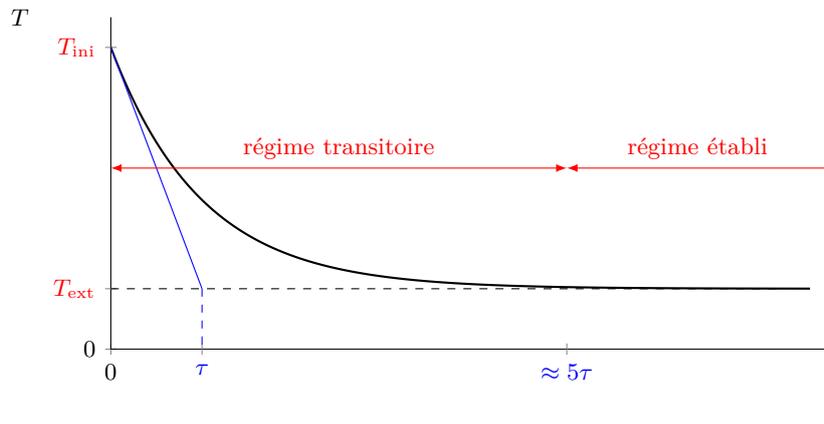


FIGURE 8 – Loi d'évolution du premier ordre de la température.

On constate facilement que la variation de la température présente deux phases, ce qui est tout-à-fait général au système du premier ordre :

- au début, la variation de T est importante, c'est le **régime transitoire** ;
- au bout d'un certain temps, T est très proche de sa valeur finale et reste constante, c'est le **régime permanent** ou **régime établi**.

La valeur de T en régime établi est T_{ext} , autrement dit la solution particulière de l'équation différentielle. Cela n'est pas surprenant car en régime établi, T n'évolue plus, et a donc une dérivée nulle, ce qui est justement la condition utilisée pour trouver T_p .

Lorsqu'un système évolue selon un régime transitoire du premier ordre, la valeur de la variable après un temps très long est donnée par la solution particulière de l'équation différentielle :

$$T_{(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} T_p = T_{\text{ext}}$$

Cette conclusion est très importante. En effet, si on souhaite juste connaître la valeur finale (asymptotique) de la variable, il n'y a pas besoin de résoudre complètement l'équation différentielle, mais il suffit de trouver la solution particulière.

Évaluons maintenant la durée du régime transitoire. Pour cela, déterminons la durée t_1 nécessaire pour que $T - T_{\text{ext}}$ soit égale à 1% de sa valeur initiale, soit $T_{t_1} - T_{\text{ext}} = 0,01 (T_{\text{ini}} - T_{\text{ext}})$. Introduisons cette condition dans l'expression de $T_{(t)}$ donnée par (12) :

$$T_{(t_1)} - T_{\text{ext}} = (T_{\text{ini}} - T_{\text{ext}}) \times e^{-t_1/\tau} \Rightarrow 0,01 (T_{\text{ini}} - T_{\text{ext}}) = (T_{\text{ini}} - T_{\text{ext}}) \times e^{-t_1/\tau} \Rightarrow \ln \frac{1}{100} = -\frac{t_1}{\tau} \Rightarrow t_1 = \tau \times \ln 100$$

L'application numérique donne $t_1 = 4,6\tau$. Un calcul analogue permet de déterminer que $T - T_{\text{ext}}$ est égale à 0,1% de sa valeur initiale à la date $t_2 = \tau \times \ln 1000 = 6,9\tau$. En d'autres termes, la durée du régime transitoire est de quelques τ , typiquement 5 à 7τ .

La constante de temps d'un phénomène évoluant selon un régime transitoire du premier ordre est une mesure de la durée du régime transitoire. La variable atteint sa valeur finale au bout d'un temps de l'ordre de 5τ à 7τ .

Ce résultat est très important, car il permet d'affirmer qu'on est en régime établi, autrement que la grandeur étudiée est arrivée à sa valeur finale, dès lors qu'on a laissé s'écouler un temps de l'ordre de 7τ . Il est donc très important de toujours calculer numériquement τ avant de commencer la résolution de l'équation différentielle.

2.3 Température d'équilibre d'une planète ; effet de serre

2.3.1 Position du problème

Tous les astres, qui ne sont pas à température nulle, émettent de l'énergie par rayonnement. Les échanges thermiques par rayonnement entre une planète et son environnement (son étoile et le reste de l'espace) détermine la température de la surface de la planète. On peut mettre en évidence que la présence d'une atmosphère modifie cette température d'équilibre.

Dans la suite, on va raisonner sur le système constitué de la Terre et du Soleil, et déterminer la température de surface de la Terre. Le Soleil est assimilable à une sphère de rayon $R_S = 7,0 \cdot 10^8$ m. La Terre est également assimilable à une sphère de rayon $R_p = 6,4 \cdot 10^6$ m, et son orbite autour du Soleil est quasiment circulaire de rayon $D = 1,5 \cdot 10^{11}$ m. La température de surface du Soleil est $T_S = 5785$ K. Des mesures satellitaires montrent que la Terre réfléchit une partie du rayonnement solaire qui lui arrive ; la fraction réfléchie s'appelle l'albedo et vaut $A = 0,34$ pour la Terre.

Dans la suite, on va appliquer le premier principe à la Terre. Sa distance au Soleil et sa vitesse étant quasiment constantes, il n'y a pas de variation d'énergie mécanique. En outre, il n'y a aucun travail, l'espace extérieur étant à pression nulle. Le premier principe s'écrit donc :

$$C \times \frac{dU}{dt} = \mathcal{P}_{\text{reçue totale}}$$

Il est légitime, en première approximation, de considérer que le Soleil et la Terre sont des corps noirs. En outre, pour le système solaire est formé depuis plusieurs milliards d'années, et on peut considérer que ces deux astres sont en situation de quasi-équilibre : leur température de surface est quasiment constante sur des temps longs ; en conséquence, leur énergie interne est quasiment constante. Le premier principe se réduit alors à :

$$\mathcal{P}_{\text{reçue totale}} = 0$$

c'est-à-dire que la puissance thermique effectivement reçue par la Terre en provenance du Soleil est compensée par une puissance égale que la Terre envoie vers l'espace. Cette dernière est la somme de deux termes :

- la puissance que la Terre émet en tant que corps noir,
- la puissance venant du Soleil que la Terre réfléchit vers l'espace.

2.3.2 Température d'équilibre de la Terre sans atmosphère

Pour commencer, on va déterminer la température d'équilibre qu'on mesurerait à la surface de la Terre si celle-ci était dépourvue d'atmosphère. La puissance émise par la Terre, de surface $4\pi R_p^2$ et de température T_p est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann : $\mathcal{P}_{\text{émission Terre}} = 4\pi R_p^2 \times \sigma \times T_p^4$.

Par ailleurs, le Soleil de surface $4\pi R_S^2$ et de température T_S émet une puissance totale : $\mathcal{P}_S = 4\pi R_S^2 \times \sigma \times T_S^4$. Cette puissance est émise de manière isotrope, c'est-à-dire de façon identique dans toutes les directions de l'espace. La totalité de cette puissance passe à travers la sphère de rayon D centrée sur le Soleil, dont la Terre occupe une partie. La sphère de rayon D a une surface $4\pi D^2$. La Terre offre au Soleil une surface apparente égale à celle d'un disque de rayon R_p , soit πR_p^2 ; c'est cette surface qui intercepte les rayons solaires¹³. En conséquence, la puissance reçue par la Terre venant du Soleil est :

$$\mathcal{P}_{\text{solaire reçue}} = \mathcal{P}_S \times \frac{\pi R_p^2}{4\pi D^2} = 4\pi R_S^2 \times \sigma \times T_S^4 \times \frac{R_p^2}{4D^2}$$

dont une partie est immédiatement réfléchiée vers l'espace : $\mathcal{P}_{\text{réfléchiée}} = A \times \mathcal{P}_{\text{solaire reçue}}$.

La température d'équilibre de la Terre correspond à l'égalité entre la puissance totale envoyée par la Terre vers l'espace et la puissance qu'elle reçoit du Soleil, soit :

$$\mathcal{P}_{\text{solaire reçue}} = \mathcal{P}_{\text{réfléchiée}} + \mathcal{P}_{\text{émission Terre}} \Rightarrow (1 - A) \mathcal{P}_{\text{solairereçue}} = \mathcal{P}_{\text{émission Terre}}$$

Remplaçons les différents termes, et simplifions par $4\pi\sigma R_p^2$:

$$4\pi R_p^2 \times \sigma \times T_p^4 = (1 - A) \times 4\pi R_S^2 \times \sigma \times T_S^4 \times \frac{\pi R_p^2}{4\pi D^2} \Rightarrow T_p^4 = \frac{(1 - A) R_S^2}{4D^2} \times T_S^4$$

expression dans laquelle on remarque que ni la constante de Stefan σ ni la taille de la planète R_p n'apparaissent. On obtient finalement :

$$T_p = T_S \times \left[\frac{R_S^2(1 - A)}{4D^2} \right]^{1/4} \approx 252 \text{ K} = -21 \text{ }^\circ\text{C}$$

Cette valeur est du bon ordre de grandeur, mais ne correspond pas à la réalité. Notons cependant que le modèle est validé, car il permet de prédire la température des astres sans atmosphère qu'on a pu mesurer, comme Mars ou la Lune.

2.3.3 Effet de serre

La température de surface de la Terre est plus élevée que la valeur obtenue par le bilan énergétique d'une Terre sans atmosphère. On va montrer que la présence de l'atmosphère terrestre permet de corriger le résultat pour obtenir une valeur proche de la réalité.

Des mesures effectuées par des instruments embarqués dans des satellites qui orbitent au-dessus de l'atmosphère, on peut comparer le rayonnement émis par le Soleil et ce qui en arrive au niveau de la surface terrestre. Du fait de sa température élevée, le rayonnement solaire se situe principalement dans le visible et le proche ultraviolet, comme prévu par la loi de Wien. La figure 9a montre en traits fins le spectre du rayonnement solaire capté au-dessus de l'atmosphère, et celui capté au niveau de la mer ; l'intensité est plus faible au niveau de la mer, en raison de l'absorption d'une partie de ce rayonnement par l'atmosphère. L'analyse quantitative de ces courbes permet d'estimer qu'environ 25% du rayonnement solaire est absorbé par l'atmosphère, autrement dit environ 75% du rayonnement solaire parvient au sol¹⁴.

13. Vu du Soleil, la Terre apparaît comme un disque, tout comme le Soleil ou la Lune nous apparaissent comme des disques. C'est la surface de ce disque qui fait écran aux rayons solaires. En d'autres termes, les rayons solaires seraient autant arrêtés si la Terre était plate de même rayon.

14. On peut noter que certaines longueurs d'onde sont presque totalement absorbées par des molécules de l'atmosphère, identifiées sur la figure. En particulier, toutes longueurs d'onde inférieures à $0,3 \mu\text{m} = 300 \text{ nm}$ sont absorbées par l'ozone : les rayonnements UV sont arrêtés par la « couche d'ozone », ce qui contribue fortement à l'existence de la vie aérienne. En effet, les UV sont en mesure de briser les liaisons covalentes, et entraînent en particulier des dommages aux molécules d'ADN.

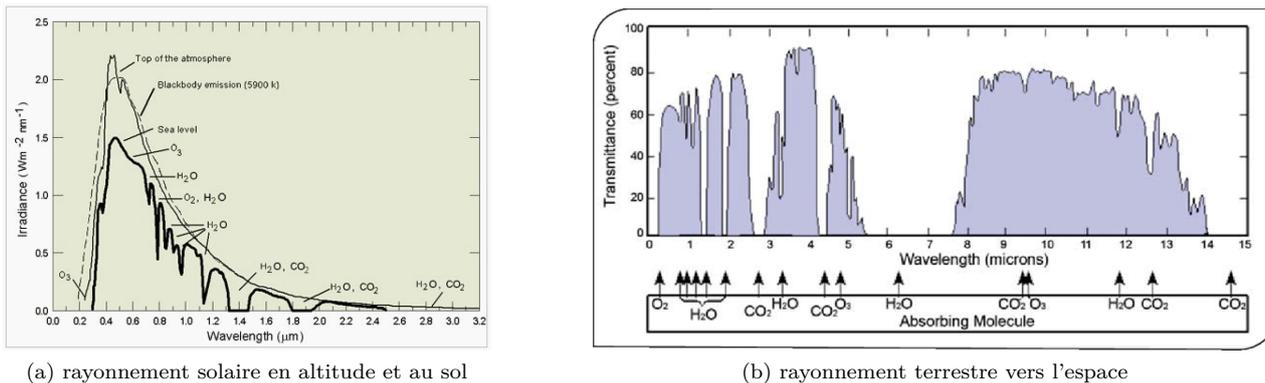


FIGURE 9 – Spectres des rayonnements solaire et terrestre.

La température de la Terre étant nettement plus basse que celle du Soleil, elle émet principalement dans l'infrarouge. La figure 9b présente le spectre du rayonnement terrestre tel qu'il est mesuré au-dessus de l'atmosphère¹⁵. On constate que de nombreuses longueurs d'onde, pourtant émises par la Terre, sont totalement absentes du spectre. Ceci est dû à une forte absorption du rayonnement infrarouge par les molécules de l'atmosphère. Des mesures quantitatives permettent d'estimer qu'environ 75% du rayonnement émis par la Terre est absorbé par l'atmosphère.

En définitive, le Soleil et la Terre émettent dans des gammes de longueurs d'onde différentes, qui sont absorbées très différemment par l'atmosphère (figure 10). On appelle **effet de serre atmosphérique** l'absorption différente par l'atmosphère terrestre des rayonnements UV-visible émis par le Soleil et des rayonnements infrarouge émis par la Terre :

- l'atmosphère terrestre est largement transparente au rayonnement solaire,
- l'atmosphère terrestre est largement opaque au rayonnement terrestre.

De ce fait, l'atmosphère « piège » une partie de l'énergie émise par la Terre, ce qui a pour effet d'augmenter la température d'équilibre de la surface.

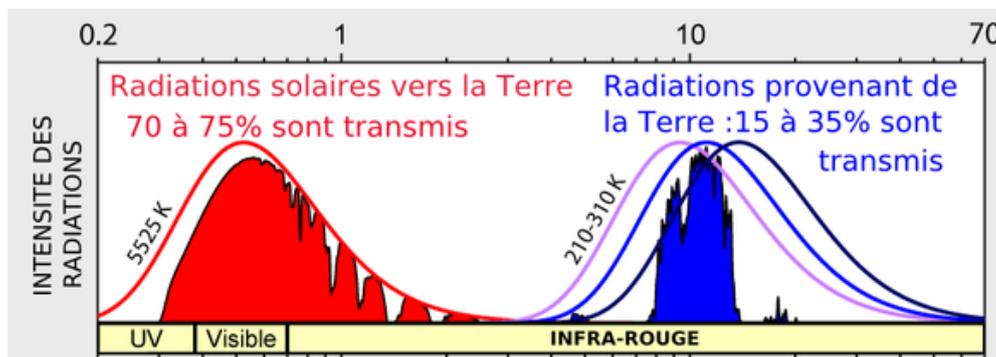


FIGURE 10 – Absorption différentielle des longueurs d'onde par l'atmosphère terrestre.

Robert A. ROHDE (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Radiation_transmise.png)

2.3.4 Température d'équilibre de la Terre avec atmosphère

La détermination de la température d'équilibre de la surface de la Terre, entourée d'une atmosphère peut se faire selon un raisonnement analogue à celui fait précédemment pour la Terre sans atmosphère, à condition de considérer deux systèmes de température différentes : la Terre de température T_p et l'atmosphère de température T_a . Le calcul nécessite de choisir des valeurs numériques pour les proportions des rayonnements terrestre et solaire absorbés par l'atmosphère.

15. Ce spectre provient de Michael RADUNSKY : https://www.researchgate.net/figure/Spectre-de-transmission-de-l-atmosphere-du-visible-a-linfrarouge-avec-les-principales_fig3_275168262

Dans un sujet de concours de 1996, les hypothèses posées étaient les suivantes.

- Le Soleil, la Terre et l'atmosphère se comportent comme des corps noirs de températures T_S , T_p et T_a .
- L'atmosphère est suffisamment fine pour qu'on puisse assimiler sa surface à celle de la Terre¹⁶.
- La Terre et son atmosphère réfléchissent une partie du rayonnement solaire. La fraction totale réfléchie est l'albedo $A = 0,34$.
- L'atmosphère absorbe une fraction $\alpha = 0,33$ du rayonnement solaire non réfléchi et absorbe complètement le rayonnement terrestre.
- La Terre absorbe la fraction $1 - \alpha$ du rayonnement solaire non réfléchi.

Comme la Terre est formée depuis longtemps, on peut considérer qu'elle est en situation de quasi-équilibre thermique, autrement dit la température de la surface terrestre et la température de l'atmosphère sont constantes. Comme on l'a vu en analysant le problème, cela implique que :

- la puissance reçue par l'atmosphère est égale à la puissance émise par l'atmosphère,
- la puissance reçue par la surface terrestre est égale à la puissance émise par la surface terrestre.

On a déjà montré qu'il arrive au niveau du sommet d'atmosphère une partie de la puissance totale émise par le Soleil égale à :

$$\mathcal{P}_{\text{solaire reçue}} = \mathcal{P}_S \times \frac{\pi R_p^2}{4\pi D^2} = 4\pi R_S^2 \times \sigma \times T_S^4 \times \frac{R_p^2}{4D^2}$$

mais qu'une partie est immédiatement réfléchie : $\mathcal{P}_{\text{réfléchi}} = A \times \mathcal{P}_{\text{solaire reçue}}$. Autrement dit, tout se passe comme s'il arrivait sur le système terrestre en provenance du Soleil la puissance :

$$(1 - A) \mathcal{P}_{\text{solaire reçue}} = (1 - A) \times 4\pi R_S^2 \times \sigma \times T_S^4 \times \frac{R_p^2}{4D^2}$$

dont l'atmosphère absorbe une fraction α , et la surface de la Terre reçoit le reste soit une fraction $(1 - \alpha)$.

La puissance émise par la Terre est entièrement absorbée par l'atmosphère; elle a déjà été calculée :
 $\mathcal{P}_{\text{émission Terre}} = 4\pi R_p^2 \times \sigma \times T_p^4$.

Enfin, l'atmosphère se comporte comme un corps noir de température T_a et émet donc une puissance donnée par la loi de Stefan-Boltzmann par sa surface. L'atmosphère a une surface du côté de la Terre, qui est égale à la surface de la Terre, et une surface du côté de l'espace, qu'on suppose avoir la même valeur puisque l'atmosphère est supposée fine. La puissance émise par l'atmosphère par chacune de ses deux surfaces est :
 $\mathcal{P}_{\text{émission atm}} = 4\pi R_p^2 \times \sigma \times T_a^4$.

Faisons le bilan des puissances reçues et émises pour la surface terrestre :

- elle reçoit venant du Soleil $(1 - \alpha) \times (1 - A) \mathcal{P}_{\text{solaire reçue}}$,
- elle reçoit venant de l'atmosphère $\mathcal{P}_{\text{émission atm}}$,
- elle émet $\mathcal{P}_{\text{émission Terre}}$,

ce qui permet d'écrire une première relation :

$$(1 - \alpha) \times (1 - A) \mathcal{P}_{\text{solaire reçue}} + \mathcal{P}_{\text{émission atm}} = \mathcal{P}_{\text{émission Terre}}$$

Faisons de même pour l'atmosphère :

- elle reçoit venant du Soleil $\alpha \times (1 - A) \mathcal{P}_{\text{solaire reçue}}$,
- elle reçoit venant de la Terre $\mathcal{P}_{\text{émission Terre}}$,
- elle émet par ses deux surfaces $2 \times \mathcal{P}_{\text{émission atm}}$,

ce qui permet d'écrire une seconde relation :

$$\alpha \times (1 - A) \mathcal{P}_{\text{solaire reçue}} + \mathcal{P}_{\text{émission Terre}} = 2 \mathcal{P}_{\text{émission atm}}$$

16. Cette hypothèse est totalement justifiée par le fait que la très grande majorité de la masse de l'atmosphère est concentrée dans sa couche la plus basse, la troposphère, dont l'épaisseur est de 20 km au maximum, soit une distance négligeable devant le rayon terrestre.

On doit donc résoudre un système de deux équations, dans lesquelles les deux inconnues sont les températures de la surface terrestre T_p et de l'atmosphère T_a :

$$\begin{cases} (*) & (1 - \alpha) \times (1 - A) \mathcal{P}_{\text{solaire reçue}} = \mathcal{P}_{\text{émise Terre}} - \mathcal{P}_{\text{émise atm}} \\ (\#) & \alpha \times (1 - A) \mathcal{P}_{\text{solaire reçue}} = -\mathcal{P}_{\text{émise Terre}} + 2 \mathcal{P}_{\text{émise atm}} \end{cases}$$

En effectuant la somme membre à membre de (*) et (#), on obtient une équation dans laquelle la seule inconnue est T_a :

$$\begin{aligned} (1 - A) \mathcal{P}_{\text{solaire reçue}} = \mathcal{P}_{\text{émise atm}} &\Rightarrow (1 - A) \times 4\pi R_S^2 \times \sigma \times T_S^4 \times \frac{R_p^2}{4D^2} = 4\pi R_p^2 \times \sigma \times T_a^4 \\ &\Rightarrow (1 - A) \times T_S^4 \times \frac{R_S^2}{4D^2} = T_a^4 \end{aligned}$$

On en déduit que la température de l'atmosphère dans ce modèle est la température de la surface terrestre dans le modèle d'une Terre sans atmosphère :

$$T_a = T_S \times \left[\frac{R_S^2(1 - A)}{4D^2} \right]^{1/4} \approx 252 \text{ K} = -21 \text{ °C}$$

ce qui est un bon ordre de grandeur de la température moyenne de la troposphère. En effectuant la somme membre à membre 2 (*) + (#), on établit une équation dont l'unique inconnue est T_p :

$$\begin{aligned} (2 - \alpha) \times (1 - A) \mathcal{P}_{\text{solaire reçue}} &= \mathcal{P}_{\text{émise Terre}} \\ \Rightarrow (2 - \alpha) \times (1 - A) \times 4\pi R_S^2 \times \sigma \times T_S^4 \times \frac{R_p^2}{4D^2} &= 4\pi R_p^2 \times \sigma \times T_p^4 \\ \Rightarrow (2 - \alpha) \times (1 - A) \times T_S^4 \times \frac{R_S^2}{4D^2} &= T_p^4 \end{aligned}$$

dont on tire la température de surface de la Terre :

$$T_p = T_S \times \left[\frac{R_S^2 \times (1 - A) \times (2 - \alpha)}{4D^2} \right]^{1/4} \approx 286 \text{ K} = 13 \text{ °C}$$

ce qui est très proche de la valeur mesurée (qui est d'environ 15 °C). La prise en compte du rôle de l'atmosphère (l'effet de serre) est cruciale pour expliquer la température de la Terre, et en particulier permettre que la majorité de l'eau soit liquide à la surface de notre planète.

Les valeurs numériques obtenues dépendent des hypothèses du modèle, ici la valeur de α et le fait que le rayonnement terrestre soit entièrement absorbé par l'atmosphère. Le modèle peut être affiné, mais il conduit à un résultat similaire : la présence de l'atmosphère augmente la température de surface de la Terre d'environ 35 °C.