1 – Interactions mécaniques et équilibre

Les théories sur le mouvement remontent à l'Antiquité, mais l'idée qu'il puisse exister des interactions à distance a posé problème. L'hypothèse d'une interaction à distance entre deux masses, dont l'intensité est inversement proportionnelle au carré de la distance a été formulée pour la première fois par Robert Hooke ; Isaac Newton a développé cette théorie par un développement mathématique rigoureux de la force de gravitation universelle. On distingue maintenant les interactions à distance (interactions fondamentales) des interactions de contact. Les premières sont rangées en deux grandes familles : l'*interaction gravitationnelle* d'une part, désormais décrite par la théorie de la relativité générale, et les interactions de type quantique d'autre part : l'*interaction électrostatique* dont les caractéristiques ont été déterminée par Augustin Coulomb, l'*interaction faible* (responsable de certaines désintégrations radioactives et maintenant associée à l'interaction électrostatique dans la *théorie électrofaible*) et l'*interaction forte* (responsable de la stabilité des noyaux atomiques). À l'échelle macroscopique, seules les interactions gravitationnelle et électrostatique jouent un rôle ; la portée des interactions faible et forte est limitée à l'échelle atomique ou nucléaire.

Il est possible en théorie de décrire la totalité des interactions entre deux systèmes à l'aide des seules interactions fondamentales (gravitationnelle et électrostatique). Cependant, il faudrait alors considérer toutes les interactions entre tous les atomes des deux systèmes, ce qui est impossible en pratique. Les interactions mettant en jeu un très grand nombre d'atomes sont modélisées par des forces macroscopiques : poids, forces de frottement, etc.

portrait par Mary Beale

Robert Hooke (1635 - 1703)
physicien anglais

Charles-Augustin Coulomb (1736 - 1806)
physicien français

Vidéo sur les vecteurs et leur manipulation :	https://go.screenpal.com/watch/cYfvFpBZJ6
Vidéo sur les forces à distance :	https://go.screenpal.com/watch/cYfTFQAkIE
Vidéo sur l'équilibre d'un système :	https://go.screenpal.com/watch/c0VjowVwFCY

Plan du chapitre

Programme officiel – Premier semestre – **Thème M – mouvements et interactions**

Notions	Capacités exigibles
M.2.1. Quantité de mouvement d'un système matériel Masse d'un système matériel. Conservation de la masse d'un système matériel fermé. Centre de masse d'un système matériel.	Justifier qualitativement la position du centre de masse d'un système matériel, cette position étant donnée.
M.2.2. Lois de Newton Modélisation d'une action mécanique par une force. Troisième loi de Newton. Équilibre d'un système. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète.	Établir un bilan des actions mécaniques s'exerçant sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte en représentant les forces associées sur une figure.
Modèle d'une force de frottement fluide linéaire en vitesse.	
Modèle du frottement de glissement : lois de Coulomb.	Exploiter les lois de Coulomb fournie dans les trois situations : équilibre.
Modèle linéaire de l'élasticité d'un matériau.	Caractériser une déformation élastique linéaire par sa réversibilité et son amplitude proportionnelle à la force appliquée. Extraire une constante de raideur et une longueur à vide à partir de mesures expérimentales ou de données. Analyser la limite d'une modélisation linéaire à partir de documents expérimentaux.

1 Forces et équilibre d'un système

1.1 Modélisation d'une action mécanique : force

Une **force** est une **action mécanique** s'exerçant localement sur un point matériel, c'est-à-dire une portion de l'espace petite à l'échelle de l'observateur et invariante par rotation. La force est modélisée par un vecteur $\vec{f}$ dont les caractéristiques sont les suivantes :

- sa direction est celle de l'action, portée par la **droite d'action**,
- son sens est celui de l'action,
- sa norme est égale à l'intensité de l'action exercée, exprimée en **newton** N.

Si plusieurs forces $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, ..., $\vec{f_N}$ s'exercent sur le point matériel M, la force globale que celui-ci subit, appelée **résultante** des forces exercées, est la somme vectorielle de ces forces :

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{j=1}^{N} \vec{f_j}}$$

1.2 Loi des actions réciproques (troisième loi de Newton)

Un postulat fondamental de la physique est qu'un système ne peut pas agir sur lui-même. En conséquence, on doit admettre que si une force s'exerce sur le point matériel M, c'est qu'il existe un corps extérieur à M, par exemple au point M′, qui est responsable de cette force. Les points M et M′ sont **en interaction**.

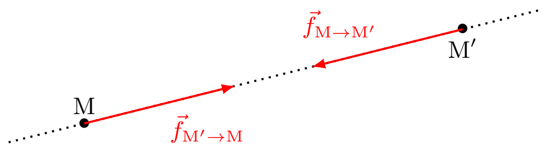


FIGURE 1 – Action réciproque entre points matériels.

La **troisième loi de Newton** ou loi des actions réciproques, énonce que :

> si M′ exerce sur M une force $\vec{f}_{\mathrm{M}'\to\mathrm{M}}$, alors M exerce sur M′ une force $\vec{f}_{\mathrm{M}\to\mathrm{M}'}$ de **même droite d'action** et telle que :
>
> $$\vec{f}_{\mathrm{M}\to\mathrm{M}'} = -\vec{f}_{\mathrm{M}'\to\mathrm{M}}$$

Notre poids nous tire vers le bas, et nous exerçons sur le plancher une force égale à notre poids. Si nous passons pas à travers le plancher, c'est parce que celui-ci exerce sur nous une force exactement opposée à notre poids, qui nous pousse vers le haut. Notons qu'il existe la plupart du temps une limite aux forces exercées : si le sol était en papier, il ne pourrait probablement pas exercer une force qui compense notre poids.

1.3 Condition d'équilibre d'un système

Un système est dit au repos, ou à l'équilibre mécanique, s'il n'est animé d'aucun mouvement. Cela implique en particulier que sa vitesse est nulle. Une condition nécessaire pour qu'un système soit au repos est que la résultante des forces que le monde extérieur exerce sur lui soit nulle :

$$\boxed{\text{système à l'équilibre} \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}} \tag{1}$$

Attention ! c'est une <u>implication</u> et non une équivalence : si on sait que le système est à l'équilibre, alors on est certain que la résultante des forces sur lui est nulle. En revanche, si on sait que $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$, alors trois situations sont possibles :

- il est à l'équilibre,

- il se déplace à vecteur vitesse constant [1]
- il reste au même endroit mais il tourne sur lui même [2].

2 Interactions à distance

Il s'agit de forces qui s'exercent entre objets qui ne sont pas en contact entre eux. Les deux forces à distance qui s'exercent à l'échelle macroscopique sont : l'interaction gravitationnelle entre deux masses et l'interaction électrostatique entre deux charges [3].

2.1 Interactions gravitationnelle

Soit un point matériel M, de masse m, et un point matériel M′, de masse m', situés à la distance r l'un de l'autre. Notons $\vec{u}$ le **vecteur unitaire**, c'est-à-dire tel que $\|\vec{u}\| = 1$, porté par la droite (MM′) et dirigé de M′ vers M. La force exercée par la masse m' en M′ sur la masse m en M est de la forme [4] :

$$\boxed{\vec{f}_{\mathrm{M'}\to\mathrm{M}} = -\frac{\mathcal{G}\,m\,m'}{r^2}\,\vec{u}} \qquad (2)$$

où $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle qui vaut $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$, la distance r étant exprimée en mètres (m) et les masses en kilogrammes (kg).

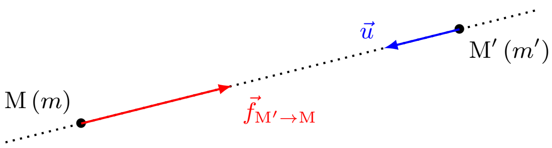


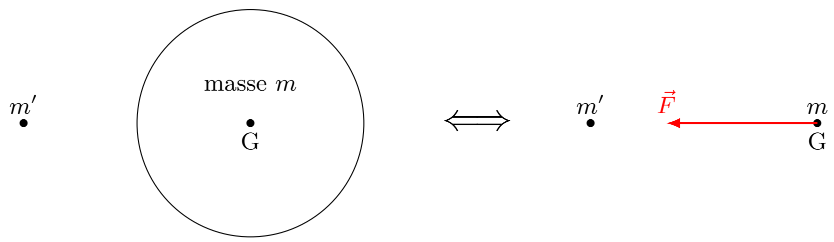
FIGURE 2 – Interaction gravitationnelle.

Cette force est **toujours attractive** : la masse m' attire à elle la masse m, et réciproquement. En outre, sa portée est infinie, c'est-à-dire qu'elle s'exerce de façon non négligeable entre deux objets extrêmement éloignés, pourvu que leurs masses soient assez grandes.

Attention ! Le signe $\ominus$ dans la formule devient un signe $\oplus$ si on oriente le vecteur unitaire dans l'autre sens ! Le signe dans la formule doit toujours être déterminé par référence au choix du vecteur unitaire.

La formule précédente est valable pour deux masses ponctuelles, c'est-à-dire dont la taille se réduit à celle d'un point. On peut généraliser à un système non ponctuel en admettant le résultat suivant : vis-à-vis de l'interaction gravitationnelle, **tout corps de masse totale m se comporte comme si toute sa masse était concentrée en un point appelé son centre de masse**.

1. C'est un mouvement rectiligne uniforme. Cette propriété est connue sous le nom de principe d'inertie ou première loi de Newton, et sera reprise dans le chapitre 3 du cours de mécanique.
2. Ce cas est complètement hors programme.
3. Les interactions fortes et faibles, qui s'exercent au niveau atomique ou infra-atomiques, ne peuvent pas être traitées dans le cadre de la mécanique classique et sont totalement hors-programme.
4. L'expression de cette force a été déterminée par Isaac NEWTON, l'un des plus grands scientifiques ayant vécus. NEWTON est à l'origine du calcul infinitésimal (autrement dit du concept d'intégration et de dérivation) avec Gottfried LEIBNITZ, qu'il a utilisé pour mathématiser les lois de la dynamique. Il a montré que les mouvements elliptique des planètes autour du Soleil ou de la Lune autour de la Terre pouvaient s'expliquer par l'existence d'une force inversement proportionnelle au carré de la distance. Il est également célèbre pour ses travaux en optique (décomposition de la lumière blanche) qui l'ont conduit à énoncer une théorie corpusculaire de la lumière. Outre ses travaux scientifiques, il a également occupé le poste de maitre de la Monnaie, où il s'est illustré par sa lutte contre la fausse monnaie, démontrant (par la torture ?) la culpabilité de nombreux faux-monnayeurs. Vers la fin de sa vie, il s'est tourné vers l'alchimie et l'ésotérisme.



Si la masse du corps est répartie symétriquement, le centre de masse est situé au centre géométrique du corps. Si la masse est inégalement répartie, le centre de masse est situé du côté le plus dense, en un point qu'il est possible de calculer si on connait la densité du corps en chacun de ses points. Mathématiquement, cela revient à calculer la position du point appelé le barycentre [5].

La formule de l'interaction gravitationelle reste valable en remplaçant les points M et M′ par les centres de masse G et G′ des deux corps.

2.2 Poids d'un corps au voisinage d'un astre

On s'intéresse maintenant à un objet ponctuel de masse m situé en un point M au voisinage de la Terre [6]. Il est soumis à deux forces :

- l'attraction gravitationnelle que la Terre exerce sur lui,
- une pseudo-force due à la rotation terrestre [7].

La contribution principale est l'attraction gravitationnelle. Puisque tout se passe comme si la masse de la Terre était concentrée en son centre de masse qui est le centre géométrique de la Terre, son intensité est :

$$G = -\frac{\mathcal{G}\, M_{\mathrm{T}}}{(R_{\mathrm{T}} + z)^2}$$

avec z l'altitude du corps. Si on reste dans la troposphère, z n'excède pas quelques kilomètres, et :

$$G \approx -\frac{\mathcal{G}\, M_{\mathrm{T}}}{R\mathrm{T}^2}$$

La seconde contribution, due à la rotation terrestre, est petite devant l'attraction gravitationnelle, mais elle est tout à fait décelable. La somme des deux contributions correspond à la force totale subie par un corps de masse m au voisinage immédiat de la Terre, et s'appelle le **poids** du corps [8] :

$$\boxed{\vec{F} = m \times \vec{g}} \tag{3}$$

où $\vec{g}$ est le **champ de pesanteur terrestre**. Celui-ci est dirigé quasiment vers le centre de la Terre [9], et son intensité quasiment uniforme à la surface de la Terre [10] et vaut : $g \approx 9{,}8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

5. Barycentre signifie d'ailleurs précisément le « centre de masse ». La formule du baycentre revient en fait à une moyenne pondérée des masses de chaque partie du corps entier.

6. Ceci est généralisable à n'importe quel astre.

7. La rotation de la Terre induit une force dite d'entrainement que tout corps lié à la Terre ou à son voisinage subit. Une telle force d'entrainement peut être ressentie dans une voiture qui prend un virage à vive allure : les passagers sont alors déportés vers l'extérieur du virage

8. On évitera d'appeler le poids $\vec{P}$, la lettre P étant réservée à la pression. Cela évite de « simplifier » abusivement le poids et la pression dans un exercice où interviennent le poids et des forces pressantes.

9. En raison de la rotation de la Terre sur elle-même, $\vec{g}$ n'est pas dirigé exactement vers le centre de celle-ci, sauf à l'équateur et aux pôles. Le décalage est faible, mais mesurable.

10. L'intensité dépend en réalité de la latitude, c'est-à-dire de l'éloignement par rapport à l'équateur, d'une part parce que la Terre n'est pas une sphère et que le rayon terrestre n'est pas le même à toutes les latitudes, et d'autre part du fait de la contribution de la rotation terrestre.

La direction du poids, autrement dit du champ de pesanteur, **définit la verticale** en un lieu donné. C'est la direction que prend naturellement un « fil à plomb » utilisé par les maçons pour vérifier la verticalité d'un mur.

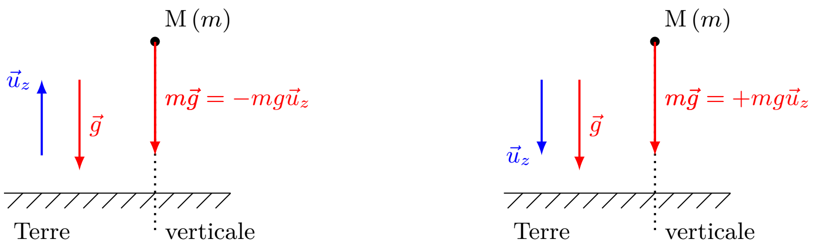


FIGURE 3 – Expression du poids d'un corps en fonction du choix du vecteur unitaire vertical.

Si on repère la direction verticale par un vecteur unitaire $\vec{u}_z$, le champ de pesanteur est toujours dirigé selon $\vec{u}_z$ puisqu'il définit la verticale. On doit cependant prendre garde que $\vec{g}$ est toujours dirigé vers le bas, et s'exprime donc :

- $\vec{g} = +g\,\vec{u}_z$ si $\vec{u}_z$ est choisi vers le bas,
- $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$ si $\vec{u}_z$ est choisi vers le haut.

En conséquence, le poids du corps est soit $+mg\,\vec{u}_z$, soit $-mg\,\vec{u}_z$, en fonction du choix du vecteur unitaire.

2.3 L'interaction électrostatique ou interaction de Coulomb

On considère un point matériel M, de charge électrique q, et un point matériel M$'$, de charge électrique q', situés à la distance r l'un de l'autre. On définit un vecteur unitaire $\vec{u}$ dans la direction reliant les deux points. La force exercée par la charge q' en M$'$ sur la charge q en M est appelée la force de Coulomb[11], et est de la forme :

$$\boxed{\vec{f}_{\mathrm{M}'\to\mathrm{M}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q\,q'}{r^2}\,\vec{u}} \tag{4}$$

où π est le nombre mathématique habituellement noté ainsi, ϵ_0 une constante universelle appelée la permittivité du vide, avec $\epsilon_0 \approx 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{s^4A^2/kg/m^3}$, ce qui correspond à : $1/4\pi\epsilon_0 \approx 9\cdot 10^9\,\mathrm{J\cdot m\cdot C^{-1}}$. La distance r est exprimée en mètres (m) et les charges en coulombs (C).

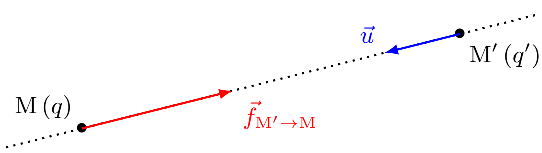


FIGURE 4 – Interaction électrostatique.

Comme pour l'interaction gravitationnelle, la portée de l'interaction électrostatique est infinie, pouvu que les charges ne soient pas trop faibles.

Le signe positif dans la formule permet de rendre compte du fait que la force de Coulomb est :

- **attractive** si les charges sont de **signes opposés**[12], soit $qq' < 0$,

11. Charles-Augustin COULOMB est un ingénieur français (1736-1806), qui a été chargé de l'édification de fortifications aux Antilles et en métropole. C'est au cours de ces travaux qu'il s'est intéressé aux lois qui régissent les forces de frottement et qui portent désormais son nom (voir la partie sur les forces de frottement solide plus loin dans ce chapitre). Il est également célèbre pour avoir déterminé les caractéristiques de la force que deux charges exercent l'une sur l'autre.

12. On remarquera que ce cas correspond à celui de la figure **??**.

- **répulsive** si les charges sont de **même signe**, soit $qq' > 0$.

Cependant, ce signe est associé à une orientation particulière du vecteur unitaire $\vec{u}$. Si ce dernier est orienté en sens opposé, le signe change dans la formule. Le choix du signe dans la formule doit être fait par des considérations physiques en fonction de la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$.

2.4 Force électrique

De même que la masse totale de la Terre crée un champ de pesanteur qui agit sur une masse, des charges présentes dans une zone de l'espace créent un champ électrique qui agit sur une charge. Un champ électrique règne en particulier dans une zone de l'espace limitée par deux électrodes planes entre lesquelles on impose une différence de potentiel. Un tel dispositif est rencontré dans une cuve d'électrophorèse, dans un spectromètre de masse, ou dans un accélérateur de particules.

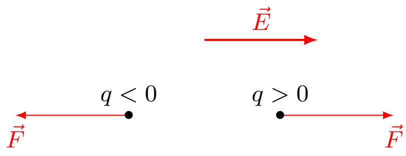


Figure 5 – Action d'un champ électrique sur une charge.

Dans une zone de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}$, une charge électrique q est soumise à la force électrique :

$$\boxed{\vec{F} = q \times \vec{E}} \tag{5}$$

Le direction de la force dépend du signe de la charge. Les anions et les cations, par exemple, migrent en sens opposés dans une cuve d'électrophorèse.

3 Forces élastiques

3.1 Élasticité linéaire d'un matériau

On dit qu'un matériau est **élastique** si, après déformation sous l'effet d'une action mécanique, il revient à sa forme initiale lorsque cette action cesse. La déformation peut être un allongement ou une compression (comme lorsqu'on tire sur un éastique), mais aussi une torsion (mouvement correspondant à une rotation autour de l'axe de symétrie comme lorsqu'on essore un linge) ou une flexion (comme lorsqu'on plie une règle en plastique). De nombreux matériaux sont élastiques : caoutchouc, plastique souple, mais aussi de façon plus inattendue : verre, béton, roches, os, fil métallique, etc.

Le **domaine élastique** correspond à la gamme de déformations pour laquelle le matériau est élastique. Au-delà de la limite d'élasticité, la déformation est, au moins partiellement, irréversible. C'est le cas d'un élastique sur lequel on tire : tant qu'on l'allonge de façon modérée, il revient à la longueur initial, mais si on tire trop, il revient à une longueur supérieure à sa longueur initiale lorsqu'on cesse de tirer.

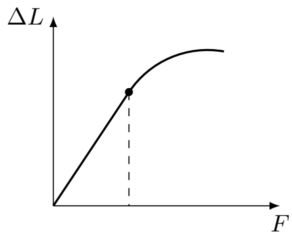


Figure 6 – Domaine d'élasticité.

Sur la courbe de la figure 6, on a représenté schématiquement la variation de longueur ΔL en fonction de la force appliquée, pour un matériau qu'on déforme en extension. Tant qu'on reste dans le domaine d'élasticité du matériau, ΔL varie avec F en suivant la courbe, puis si on diminue la force, ΔL diminue en suivant la même courbe au retour, de sorte à revenir à $\Delta L = 0$ lorsque $F = 0$. Le domaine d'élasticité correspond usuellement à une déformation de quelques pourcents, mais cela est très variable selon la nature du matériau.

L'élasticité est dite linéaire lorsque, dans le domaine d'élasticité du matériau, la déformation est proportionnelle à la force appliquée. C'est le cas de la plupart des matériau pour des déformation faibles (domaine linéaire sur la courbe de la figure 6). Pour une déformation correspondant à une simple extension, on peut énoncer une loi simple dans le domaine d'élasticité linéaire et dans le cas d'un objet ayant une forme cylindrique, une « éprouvette ».

Soit un matériau de section S et de longueur L. On applique une force F (en compression ou en extension) sur la section S, et on mesure une variation de longueur (allongement ou rétrécissement) ΔL. Dans le domaine d'élasticité linéaire, on a :

$$\boxed{\sigma = E \times \varepsilon} \tag{6}$$

avec :

- $\sigma = F/S$ la contrainte, c'est-à-dire la force exercée par unité de surface de la section,
- $\varepsilon = |\Delta L|/L_0$ l'allongement relatif,

Le facteur de proportionnalité E est appelé le **module de Young** [13], exprimé en $\mathrm{N \cdot m^{-2}}$ soit en Pa.

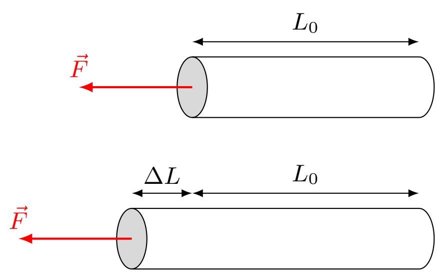


Figure 7 – Déformation d'une éprouvette.

Thomas Young
portrait par Henry Perronet Briggs [14]

3.2 Force de rappel d'un ressort

Un matériau élastique peut être modélisé par un ressort à spires, c'est-à-dire un enroulement en spirale d'un matériau linéaire (métal, béton, polymère). Un ressort au sens strict a un comportement linéaire élastique.

Un ressort horizontal fixé en O à une extrémité, l'autre en M étant libre a une **longueur à vide** L_0, qui est sa longueur lorsqu'aucune force ne lui est appliquée [15].

On définit un axe orienté $(\mathrm{O}, \vec{u}_x)$, passant par M.

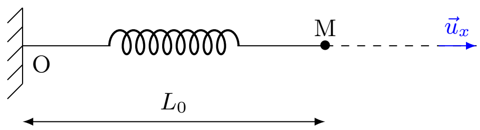


Figure 8 – Longueur à vide d'un ressort.

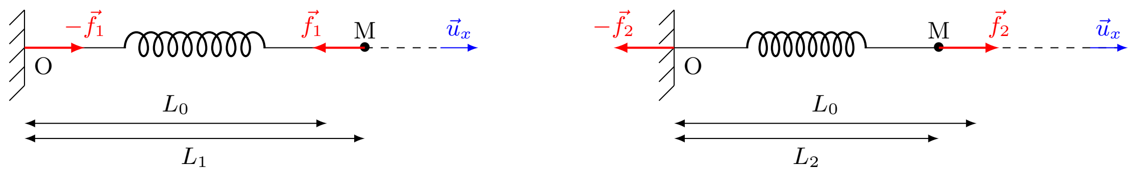
Si on allonge le ressort en tirant sur l'extrémité libre M selon l'axe x jusqu'à une longueur $L_1 > L_0$, le ressort s'oppose à cet allongement. Il exerce une **force de rappel** tendant à faire revenir le ressort à sa longueur

13. Thomas Young (1773 - 1829), de nationalité britannique, est probablement le dernier « savant » au sens de personne qui a des connaissances dans tous les domaines du savoir. Il a apporté des contributions majeures en mécanique du solide, avec la modélisation de l'elasticité des matériaux, en optique où il a contribué à l'élaboration de la théorie ondulatoire de la lumière pour expliquer en particulier le phénomène d'interférence par les fentes d'Young, mais aussi en linguistique puisqu'il a contribué au déchiffrement des hiéroglyphes égyptiens, et il a apporté des contributions déterminantes dans l'identification de la famille des langues dites indo-européennes.

14. Source : http://rstb.royalsocietypublishing.org/content/370/1666/20140308

15. Cela implique que le ressort n'a pas de masse propre, et n'est donc pas soumis à son poids qui, si le ressort est vertical, tend à déplacer son extrémité inférieure vers le bas. Ce problème n'existe évidemment pas si le ressort est horizontal.

à vide, et ceci à **chacune de ses extrémités**, soit une force $\vec{f_1}$ en M et une force $-\vec{f_1}$ en O. Tant qu'on ne déforme pas trop le ressort, celui-ci a un comportement élastique : si on supprime la cause de l'allongement, le ressort retrouve sa longueur à vide [16]. Dans le domaine d'élasticité, la force de rappel est **proportionnelle à l'allongement du ressort**. Le vecteur $\vec{u}_x$ étant dirigé dans le sens de l'allongement, et en appelant L_1 la longueur après allongement, on a donc : $\vec{f_1} = -k\,(L_1 - L_0)\,\vec{u}_x$. Le paramètre k est caractéristique du ressort considéré ; c'est sa **constante de raideur**, qui s'exprime en $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$, l'allongement $L_1 - L_0$ étant en mètres, et la force en newtons (N).



(a) force de rappel d'un ressort en extension (b) force de rappel d'un ressort en compression

FIGURE 9 – Force de rappel d'un ressort.

Si au contraire on comprime le ressort jusqu'à une longueur $L_2 < L_0$, le ressort s'oppose à la compression en exerçant une force $\vec{f_2}$ en M et une force $-\vec{f_2}$ en O, qui tendent à ramener le ressort à sa longueur à vide. À nouveau, la force de rappel est proportionnelle à la compression $L_0 - L_2$, le facteur de proportionnalité étant le même que précédemment : $\vec{f_2} = k\,(L_0 - L_2)\,\vec{u}_x = -k\,(L_2 - L_0)\,\vec{u}_x$.

On peut regrouper les deux situations précédente à condition d'algébriser la notion d'allongement. Si L est la longueur du ressort et L_0 sa longueur à vide, la force exercée au point M est proportionnelle à la variation de longueur (positive ou négative). Le vecteur unitaire $\vec{u}_x$ étant dirigé dans le sens de l'élongation, cela s'écrit :

$$\vec{f} = -k\,(L - L_0)\,\vec{u}_x$$

En considérant l'allongement algébrique, qui correspond à l'abscisse du point M comptée à partir de sa position lorsque le ressort est à vide (donc a une longueur L_0), et dans le domaine d'élasticité, la force de rappel obéit à la **loi de Hooke** [17] :

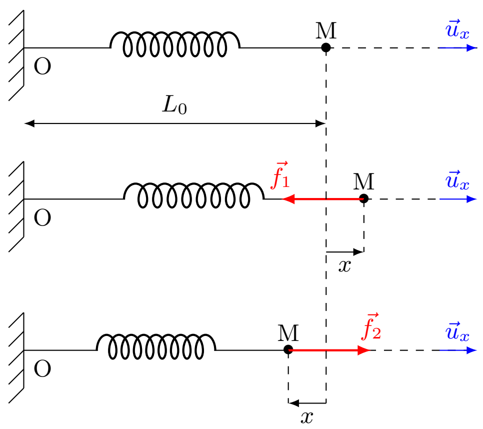


FIGURE 10 – Allongement algébrique d'un ressort.

$$\boxed{\vec{F} = -k\,(L - L_0)\,\vec{u}_x = -k\,x\,\vec{u}_x} \tag{7}$$

avec :

16. Si on tire trop, on sort du *domaine d'élasticité* du ressort : une déformation permanente du ressort apparait, c'est-à-dire que sa longueur à vide est plus grande qu'au départ. Cette déformation permanente est due à une modification de la structure du matériau à l'échelle atomique.

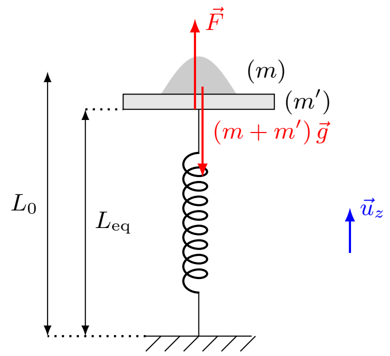
17. Robert HOOKE (1635 - 1703) est un physicien anglais contemporain d'Isaac NEWTON, avec qui il a d'ailleurs été plusieurs fois en conflit. Il a touché à de multiples domaines scientifiques. Éleve de Robert BOYLE, il l'a assisté dans ses travaux sur les gaz. Suite à l'analyse des irisations sur des bulles de savon, il a émis le premier l'hypothèse d'une nature ondulatoire de la lumière, qui a été eclipsée par la théorie corpusculaire de NEWTON. En mécanique, il a établi le premier modèle de la déformation linéaire des matériaux, et il a mathématisé la forme que prend une chainette tenue au deux extrémités, ce qui l'a amené à s'intéresser aux arcs en architecture. Il était aussi réputé pour ses qualités manuelles : il a construit le premier microscope à plusieurs lentilles, qui atteignait un grossissement de 50 et grâce auquel il a le premier décrit une cellule vivante. Il a inventé le joint universel, dit de Hooke, entre deux pièces mobiles, a contribué à l'amélioration des mécanismes d'horlogerie de précision, et a mis au point le premier « téléphone » constitué d'un fil tendu ! En météorologie, il a conçu un baromètre, un hygromètre, un anémomètre, un pluviomètre et un thermomètre à alcool, autrement dit une station météorologique complète. Enfin, ses observations des fossiles l'ont amené à faire l'hypothèse qu'il s'agissait d'être vivants disparus, et l'a amené à émettre l'idée que certains terrains pouvaient avoir été recouverts par la mer dans des temps anciens, contredisant la croyance biblique en une Terre immuable.

- $x = L - L_0$ l'allongement algébrique,
- k la constante de raideur du ressort en $\mathrm{Nm^{-1}k}$,
- $\vec{u}_x$ un vecteur unitaire.

Le signe dépend évidemment du sens de $\vec{u}_x$ et de l'extémité à laquelle on raisonne. La force de rappel est toujours dirigée dans le sens d'une retour à la longueur à vide, et le signe dans la formule doit être systématiquement adapté au sens du vecteur unitaire choisi dans le problème considéré.

Les formules établies pour le ressort peuvent être appliquées pour tous les systèmes qui se comportent de la même façon, c'est-à-dire qui exercent une force de rappel proportionnelle à l'allongement qu'ils subissent. De tels systèmes sont dits « élastiques ».

Le plateau d'une balance, de masse m', est soutenu par un ressort vertical de longueur à vide L_0, de constante de raideur k et de masse négligeable. On pose sur le plateau un objet de masse m, et on attend la stabilisation du plateau. On cherche à déterminer la longueur du ressort, qui reste vertical, lorsque l'équilibre est atteint.



Choisissons le système constitué des deux masses m et m'. Il est soumis à deux forces : son poids $(m+m')\,\vec{g}$ et la force de rappel du ressort $\vec{F}$. Comme celui-ci est en compression du fait du système qui est tiré vers la bas par la pesanteur, la force de rappel est vers le haut. À l'équilibre, on a : $\vec{F} + (m+m')\,\vec{g} = \vec{0}$. Si on définit un vecteur unitaire $\vec{u}_z$ orienté vers le haut, le champ de pesanteur est opposé à $\vec{u}_z$, et le poids s'exprime :

$$(m+m')\,\vec{g} = -(m+m')\,g\,\vec{u}_z$$

Par ailleurs, si L_{eq} est la longueur du ressort à l'équilibre, la force de rappel du ressort est proportionnelle à $k\,(L_{\mathrm{eq}} - L_0)$. Comme le ressort est en compression $L_{\mathrm{eq}} - L_0 < 0$. La force de rappel étant dans le même sens que $\vec{u}_z$, elle a pour expression :

$$\vec{F} = -k\,(L_{\mathrm{eq}} - L_0)\,\vec{u}_z$$

Introduisons ces deux expressions dans la condition d'équilibre, et factorisons par $\vec{u}_z$:

$$-(m+m')\,g\,\vec{u}_z - k\,(L_{\mathrm{eq}} - L_0)\,\vec{u}_z = \vec{0} \Rightarrow [-(m+m')\,gk\,(L_{\mathrm{eq}} - L_0)\,]\,\vec{u}_z = \vec{0}$$

Comme $\vec{u}_z \neq \vec{0}$, cette égalité est vraie si :

$$-(m+m')\,g - k\,(L_{\mathrm{eq}} - L_0) = 0 \Rightarrow L_{\mathrm{eq}} = L_0 - \frac{(m+m')\,g}{k}$$

On peut facilement vérifier que cette expression implique que $L_{\mathrm{eq}} < L_0$, ce qui est compatible avec le fait que le ressort soit en compression.

4 Force de contact entre deux solides

Il s'agit d'interactions existant au niveau du point de contact entre deux systèmes solides. La force exercée a alors pour **point d'application le point de contact**. Ces forces sont en réalité une modélisation d'un très grand nombre d'interactions fondamentales, principalement des interactions électrostatiques, entre les atomes des deux systèmes proches du point de contact.

4.1 Tension d'un fil inextensible

Un fil est un système linéaire sans forme fixe[18] ; il est inextensible si sa longueur est constante[19]. On appelle **tension** d'un fil $\vec{T}$, la force exercée par le fil sur un objet fixé à son extrémité M, lorsque le fil est tendu. Cette force a toujours pour **droite d'action le fil** lui-même. Comme pour la force de rappel d'un ressort, la tension du fil s'exerce en chacune de ses extrémités[20].

Une tension du fil nulle, $\left\|\vec{T}\right\| = 0$, peut correspondre à deux situations différentes : le fil n'est pas tendu ou le fil est rompu.

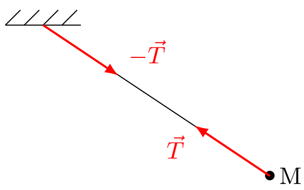
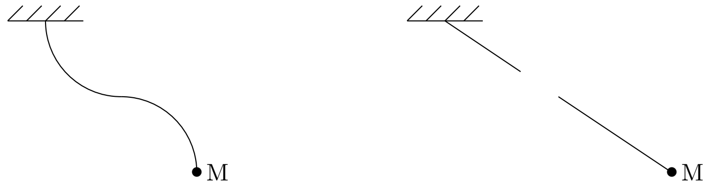


Figure 11 – Tension d'un fil inextensible



(a) fil non tendu

(b) fil rompu

Figure 12 – Fil avec une tension nulle.

L'intensité de la tension n'est pas connue *a priori*, et n'est pas identique pour un fil donné dans toutes les situations. Sa valeur dépend des autres contraintes appliquées à l'objet en M : si une personne s'accroche à l'extrémité inférieure d'une corde fixée au plafond, la tension dépend du poids de la personne[21]. La valeur de $\left\|\vec{T}\right\|$ s'ajuste à une valeur telle que l'objet reste fixé à l'extrémité du fil. Pour un plomb de masse m au repos suspendu à un fil sans masse et inextensible, la résultante des forces exercées sur le fil est nulle, soit :

$$m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = -m\vec{g}$$

La tension n'étant pas connue *a priori*, il s'agit toujours d'une inconnue dans un problème de mécanique. S'il existe une autre grandeur inconnue dans le problème, alors celui-ci n'est résoluble qu'à condition de disposer de deux équations.

Considérons une petite sphère de masse m et portant une charge électrique q, suspendue à un fil sans masse inextensible dans une zone où règne un champ électrique $\vec{E}$ horizontal. On cherche à montrer que, m et E étant connus, la mesure de l'angle que fait le fil avec la verticale permet de déterminer la charge q. Il s'agit d'un problème qui comporte deux inconnues : la charge q et la tension du fil ; il est donc nécessaire de disposer de deux équations.

Considérons le système constitué parla sphère, soumise à son poids, à la tension du fil, et à la force électrique qui est manifestement dans le sens du champ étant donné l'inclinaison du fil. La charge q est donc positive. À l'équilibre, la résultante des forces est nulle :

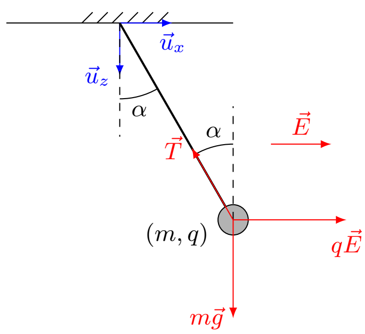


Figure 13 – Équilibre à trois forces.

$$m\vec{g} + q\vec{E} + \vec{T} = \vec{0}$$

18. Une barre rigide n'est donc pas un fil et a un comportement différent.

19. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si sa longueur varie lorsqu'on tire sur le fil, il s'agit d'un fil élastique et il se comporte comme un ressort en extension.

20. En réalité, la tension est exercée en chacun des points du fil.

21. La tension a généralement une valeur maximale au-delà de laquelle il y a rupture, par exemple si c'est un éléphant qui s'accroche à la corde.

Comme les trois vecteurs ne sont pas colinéaires, il faut raisonner dans une base munie de deux vecteurs, par exemple la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$, telle que deux des forces soient colinéaires à un vecteur de base. Projetons la relation vectorielle précédente dans la base choisie :

$$\begin{cases} 0 + qE - T\,\sin\alpha = 0 \\ mg + 0 - T\,\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} qE = T\,\sin\alpha \\ mg = T\,\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

En faisant le rapport membre à membre de ces deux relations, on obtient :

$$\frac{qE}{mg} = \tan\alpha \Rightarrow q = \frac{mg\,\tan\alpha}{E}$$

ce qui permet bien de déterminer q connaissant l'angle α. Par ailleurs, on peut déterminer la tension du fil de plusieurs manières différentes. La seconde équation du système donne :

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

En sommant membre à membre le carré des deux équations, on peut aussi écrire :

$$(qE)^2 + (mg)^2 = T^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) \Rightarrow T = \sqrt{(qE)^2 + (mg)^2}$$

dont on peut facilement montrer qu'il s'agit de la même expression que la précédente, en utilisant la relation de trigonométrie : $1 + \tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$.

4.2 Réaction d'un support solide ; lois de Coulomb

Considérons un solide étendu (non ponctuel) posé sur un pan incliné. Le solide est soumis à son poids, qui tend à le déplacer vers le bas. S'il ne tombe pas à travers le support, c'est que celui-ci le repousse. L'interaction répulsive entre le pan incliné et le solide est due aux répulsions entre les atomes de la surface du support et ceux de la surface du solide[22]. Un très grand nombre de forces répulsives sont donc à l'œuvre au niveau de la surface de contact entre le solide et le support.

Il est impossible de calculer individuellement l'ensemble de ces forces. On doit se contenter d'un modèle macroscopique. L'ensemble de ces forces est mathématiquement équivalent à une force unique $\vec{R}$, appelée **réaction du support**, exercée par le support en un point I de la surface de contact, et dont la droite d'action passe par le centre de gravité G du solide.

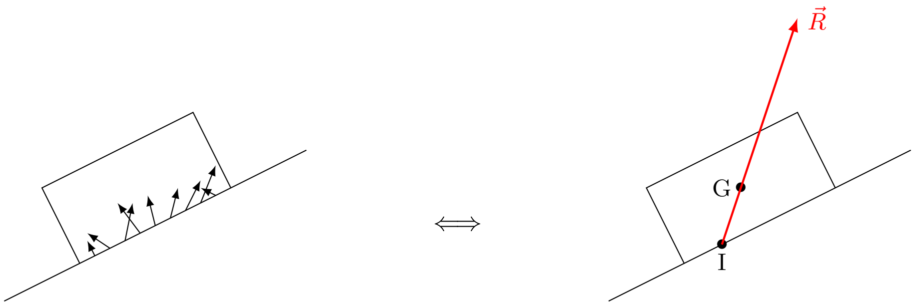


FIGURE 14 – Modélisation des frottements solides.

Les caractéristiques de la réaction du support dépendent des autres contraintes auxquelles le solide est soumis ; son intensité n'est pas connue *a priori*[23]. En outre, sa direction est également inconnue *a priori*. Son sens, en revanche, est toujours de la surface vers le centre du solide.

22. Ces interactions répulsives sont principalement de nature électrostatique : les noyaux des atomes en surface se repoussent, puisqu'ils sont de même charge. D'autre part, le fait que deux électrons ne puissent être dans le même état quantique (principe de Pauli) contribue également à empêcher l'interpénétration des nuages électroniques.

23. C'est le même problème que pour la tension d'un fil.

Il est commode, et toujours possible, de décomposer la réaction du support en deux termes : une **composante normale** orthogonale à la surface de contact $\vec{R}_\mathrm{N}$ et une **composante tangentielle** parallèle à la surface de contact $\vec{R}_\mathrm{T}$:

$$\boxed{\vec{R} = \vec{R}_\mathrm{N} + \vec{R}_\mathrm{T}} \tag{8}$$

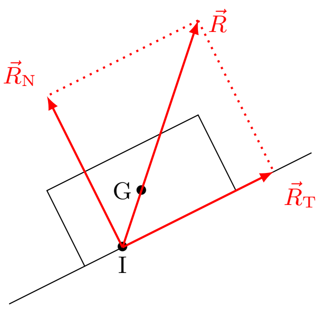


FIGURE 15 – Décomposition de $\vec{R}$.

La composante normale de la réaction est toujours non nulle ; elle molélise simplement le fait que le solide ne passe pas à travers le support. En revanche, la composante tangentielle peut être nulle ou non nulle.

Si la composante tangentielle est nulle $\vec{R}_\mathrm{T} = \vec{0}$, la réaction du support est purement normale, soit : $\vec{R} = \vec{R}_\mathrm{N}$. La réaction du support n'a alors aucune influence sur le mouvement du solide le long du support ; en effet, la réaction étant normale n'induit aucun mouvement parallèlement à la surface.

Si au contraire $\vec{R}_\mathrm{T} \neq \vec{0}$, il existe des **frottements solides**, qui s'opposent au mouvement, réel (dans le cas d'un mouvement) ou potentiel (dans le cas de l'équilibre). Par exemple, dans le cas où le solide est soumis uniquement à son poids et à la réaction du support, le poids a tendance à l'entrainer vers le bas, et la réaction tangentielle est en sens contraire donc vers le haut [24].

Les relations entre les composantes normale et tangentielle constituent les **lois de Coulomb**. Dans le cas de l'équilibre, autrement dit si le système est immobile sur le support, alors il n'y a pas de relation entre R_T et R_N, mais R_T ne peut pas excéder une valeur maximale.

Loi du Coulomb du frottement statique

Si le solide est immobile par rapport au support, la réaction tangentielle **ne peut pas dépasser une valeur limite** :

$$\boxed{\left\|\vec{R}_\mathrm{T}\right\|_\mathrm{max} = f_0 \left\|\vec{R}_\mathrm{N}\right\|} \quad \text{soit} \quad \boxed{\left\|\vec{R}_\mathrm{T}\right\| \leq f_0 \left\|\vec{R}_\mathrm{N}\right\|} \tag{9}$$

avec f_0 est le **coefficient de frottement statique**, sans unité.

Le coefficient de frottement statique dépend du contact entre le solide et le support : surface de contact, nature chimique des surfaces, état de surface (lisse ou rugueux), etc.

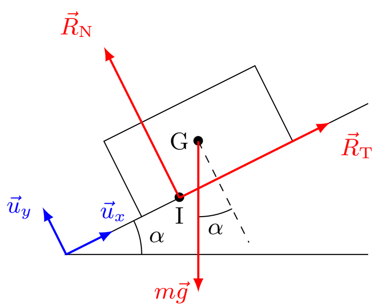


FIGURE 16 – Équilibre sur un pan incliné.

Considérons un solide de masse m immobile sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il est soumis à son poids et à la réaction du support constituée d'une composante normale et d'une composante tangentielle, orientée vers le haut du pan incliné car le mouvement potentiel du solide est vers le bas sous l'effet de la pesanteur. L'équilibre s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{R}_\mathrm{T} + \vec{R}_\mathrm{N} = \vec{0}$$

Choisissons une base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ de sorte que deux des forces soient colinéaires aux vecteurs de base, et projetons la relation précédente sur la base :

24. La composante tangentielle modélise le rôle d'aspérités de surface qui gênent le mouvement, mais aussi les attractions entre le solide et le support. On peut rappelle qu'il existe toujours des interactions attractives de Van der Waals entre les deux surfaces en regard. À très courte distance cependant, ces interactions deviennent négligeables devant les répulsions électrostatiques entre les électrons et les noyaux des atomes de surface.

$$\begin{cases} R_\mathrm{T} - mg\,\sin\alpha = 0 \\ R_\mathrm{N} - mg\,\cos\alpha = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_\mathrm{T} = mg\,\sin\alpha \\ R_\mathrm{N} = mg\,\cos\alpha \end{cases}$$

Si la valeur de α augmente, c'est-à-dire si l'inclinaison augmente, alors R_N diminue et R_T. Il arrive nécessairement une inclinaison pour laquelle R_T arrive à sa valeur maximale possible, au-delà de laquelle l'équilibre n'est plus possible. Autrement dit, il existe un angle limite d'équilibre, au-delà duquel le solide ne peut pas rester au repos sur le pan incliné. Lorsqu'on parvient à l'angle limite d'équilibre α_lim, on peut écrire une relation supplémentaire, qui est la loi de Coulomb :

$$R_{\mathrm{T\,max}} = f_0\,R_\mathrm{N}$$

dans laquelle on peut remplacer les deux forces par leurs expressions en fonction de α, puisqu'on est encore à l'équilibre pour cet angle limite :

$$mg\,\sin\alpha_\mathrm{lim} = f_0\,mg\,\cos\alpha_\mathrm{lim} \Rightarrow f_0 = \tan\alpha_\mathrm{lim}$$

La mesure de l'angle limite d'équilibre permet de déterminer la valeur du coefficient de frottement statique f_0. Si par exemple, $\alpha_\mathrm{limi} = 6°$, alors $f_0 = 0,105$.

Inversement, si on connait la valeur du coefficient de frottement statique, on peut prédire si le solide est ou non à l'équilibre sur un pan incliné donné. Considérons un solide de masse $m = 3{,}0\,\mathrm{kg}$ posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement statique est $f_0 = 0,21$. On veut déterminer si le solide est à l'équilibre dans les deux situations suivantes : $\alpha_1 = 8°$ et $\alpha_2 = 14°$. La mise en équation du problème est exactement la même que dans le cas précédent, et conduit au même système :

$$\begin{cases} R_\mathrm{T} = mg\,\sin\alpha \\ R_\mathrm{N} = mg\,\cos\alpha \end{cases}$$

Pour α_1, on calcule $R_\mathrm{T} = 4{,}1\,\mathrm{N}$ et $R_\mathrm{N} = 28{,}5\,\mathrm{N}$. La valeur maximale possible de la composante tangentielle est $R_{\mathrm{T\,max}} = f_0\,R_\mathrm{N} = 6{,}1\,\mathrm{N}$. Comme $R_\mathrm{T} < R_{\mathrm{T\,max}}$, l'équilibre est possible, et le solide est immobile.
Pour α_2, on a $R_\mathrm{T} = 7{,}1\,\mathrm{N}$ et $R_\mathrm{N} = 29{,}1\,\mathrm{N}$. La valeur maximale possible de la composante tangentielle est $R_{\mathrm{T\,max}} = f_0\,R_\mathrm{N} = 6{,}0\,\mathrm{N}$. Comme $R_\mathrm{T} > R_{\mathrm{T\,max}}$, cette condition est impossible, et l'équilibre n'est pas réalisé. Ce solide ne peut pas être au repos sur le pan incliné de α_2.

Lorsque la situation d'équilibre impliquerait que $\left\|\vec{R}_\mathrm{T}\right\| > \left\|\vec{R}_\mathrm{T}\right\|_\mathrm{max}$, alors l'équilibre n'est plus possible le solide se met en mouvement le long du support. Ce mouvement peut être :

- un glissement, c'est-à-dire une translation le long du support, comme une boite sur un support incliné ou une luge sur une pente enneigée,
- un roulement, c'est-à-dire une rotation autour d'un axe comme une boule ou un cylindre qui roulent sur une pente,
- un pivotement, c'est-à-dire une rotation autour d'un point ou d'une arête, comme une pierre inégale qui dévale une pente[25].

Dans le cas de la mise en mouvement de glissement, il existe une relation de proportionnalité entre les composantes normale et tangentielle.

Loi du Coulomb du glissement avec frottement

Lorsque le solide est en **mouvement de glissement** avec frottement sur le support, alors la réaction tangentielle est **indépendante de la vitesse** et vérifie :

$$\boxed{\left\|\vec{R}_\mathrm{T}\right\| = f\,\left\|\vec{R}_\mathrm{N}\right\|}$$

où f est le **coefficient de frottement dynamique** sans unité.

25. Les deux cas du roulement et du pivotement ne sont pas du tout au programme de BCPST, comme tous les mouvement impliquant une rotation.

Le coefficient de frottement dynamique dépend du contact entre le solide et le support : surface de contact, nature chimique des surfaces, état de surface (lisse ou rugueux), etc. Pour un solide et une surface donné, il est toujours inférieur au coefficient de frottement statique : $f < f_0$. Cela est facilement mis en évidence en pratique : il est plus facile d'entretenir un mouvement de glissement que de l'initier [26].

5 Forces de contact entre un fluide et un solide

5.1 Force pressante exercée par un fluide au repos

Considérons un système matériel en contact avec un fluide. Les molécules du fluide sont en agitation permanente, et il se produit un très grand nombre de chocs entre ces molécules et les atomes à la surface du système. Les molécules du fluide exercent donc sur la surface du système une multitude de forces élémentaires, dont la somme est appelée la force pressante exercée par le fluide sur la surface du système.

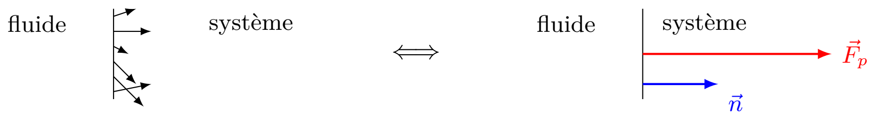


FIGURE 17 – Force pressante d'un fluide sur une surface.

Dans le cas d'une surface de contact plane, si P est la pression du fluide uniforme au niveau de la surface, S l'aire de la surface de contact entre le fluide et le système, et $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à la surface et dirigé du fluide vers le système, cette force s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}_p = P \times S \times \vec{n}} \tag{10}$$

5.2 Force de frottement fluide

Considérons un objet solide qui se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ dans un fluide immobile (liquide ou gaz). Au niveau de l'avant du solide, il y a des chocs entre les particules du fluide et le solide ; ces chocs tendent à s'opposer à l'avancée du solide. Remarquons d'emblée que le problème est identique si on considère un solide immobile dans un fluide en mouvement avec une vitesse $\vec{v'}$.

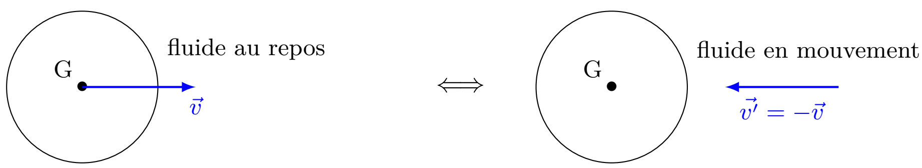


FIGURE 18 – Déplacement relatif d'un solide par rapport à un fluide.

Les chocs des particules de fluide ont tendance à entrainer le solide dans la direction de $\vec{v'}$, et ce d'autant plus que cette vitesse est grande. Cependant, un observateur qui serait lié au solide aurait l'impression de se déplacer dans le fluide avec une vitesse $\vec{v} = -\vec{v'}$. Tout se passe donc comme si le solide était en mouvement à la vitesse $-\vec{v'}$ dans le fluide au repos.

Chacun des chocs est responsable d'une force élémentaire dirigée en sens opposé à la vitesse. On peut modéliser l'ensemble des forces liées aux chocs entre le solide et les particules de fluide par une force unique, appelée **force de frottement fluide**, dans le sens opposé à la vitesse relative $\vec{v}$ du solide par rapport au fluide.

26. Par exemple, une luge peut être immobile sur une pente, mais si on lui donne une légère impulsion, elle se met en mouvement et ne s'arrête pas. De même, si on veut déplacer un meuble en le faisant glisser sur le sol, le plus dur est de le mettre en mouvement, et chacun sait qu'il est important de ne pas le laissser s'immobiliser.

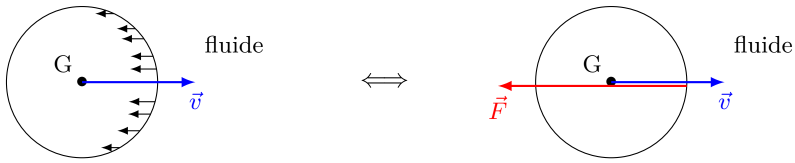


FIGURE 19 – Force de frottement fluide.

Comme on peut aisément s'en rendre compte en essayant de déplacer une planche rigide dans de l'eau, les forces qui s'opposent au mouvement sont d'autant plus importante que la vitesse est grande : plus on veut déplacer vite la planche, plus c'est dur ! Tant que cette vitesse n'est pas trop grande, il y a une relation de proportionnalité entre la force de frottement fluide et la vitesse du solide par rapport au fluide :

$$\boxed{\text{Si } v \text{ faible} \quad \vec{F} = -\alpha\,\vec{v}} \tag{11}$$

avec $\vec{v}$ la **vitesse relative du solide par rapport au fluide**, et α le **coefficient de frottement fluide**, grandeur toujours positive homogène à des $\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. Dans le cas où la vitesse relative devient élevée, la force de frottement fluide devient proportionnelle au carré de la vitesse relative : $\left\|\vec{F}\right\| = \alpha v^2$, tout en étant toujours opposée à la vitesse [27].

Le coefficient de frottement fluide α dépend à la fois du solide et du fluide :
- il est d'autant plus grand que le fluide est visqueux ;
- il est d'autant plus grand que la section du cylindre de fluide perturbé est grande, c'est-à-dire que la surface de solide exposée aux chocs est grande ;
- il dépend de la forme générale du solide (aérodynamisme) [28].

27. L'unité du coefficient de frottement fluide est alors le $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$.

28. C'est bien la forme globale du solide qui compte, et pas seulement celle de la face exposée au fluide. Les problèmes d'aérodynamisme sont très complexes et dépendent de la façon dont le fluide s'écoule le long du solide, et dont il se comporte à l'arrière du solide (en particulier s'il se forme des tourbillons). Cela relève de la dynamique des fluides, qui n'est pas au programme de première année.