MÉCANIQUE

1 – Interactions mécaniques et équilibre

Plan du chapitre

Programme officiel – Premier semestre – **Thème M – mouvements et interactions**

Notions	Capacités exigibles
M.2.1. Quantité de mouvement d'un système matériel Masse d'un système matériel. Conservation de la masse d'un système matériel fermé. Centre de masse d'un système matériel.	Justifier qualitativement la position du centre de masse d'un système matériel, cette position étant donnée.
M.2.2. Lois de Newton Modélisation d'une action mécanique par une force. Troisième loi de Newton. Équilibre d'un système. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète.	Établir un bilan des actions mécaniques s'exerçant sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte en représentant les forces associées sur une figure.
Modèle d'une force de frottement fluide linéaire en vitesse.	
Modèle du frottement de glissement : lois de Coulomb.	Exploiter les lois de Coulomb fournie dans les trois situations : équilibre.
Modèle linéaire de l'élasticité d'un matériau.	Caractériser une déformation élastique linéaire par sa réversibilité et son amplitude proportionnelle à la force appliquée. Extraire une constante de raideur et une longueur à vide à partir de mesures expérimentales ou de données. Analyser la limite d'une modélisation linéaire à partir de documents expérimentaux.

1 Forces et équilibre d'un système

1.1 Modélisation d'une action mécanique : force

Force

Une **action mécanique** s'exerçant sur un système matériel, est modélisée par une **force** $\vec{F}$ dont les caractéristiques sont les suivantes :

- sa direction est celle de l'action, portée par la **droite d'action**,
- son sens est celui de l'action,
- sa norme est égale à l'intensité de l'action exercée, exprimée en **newton** N,
- son **point d'application** est l'endroit où elle s'exerce.

Additiivité des forces

Si plusieurs forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_N$ s'exercent sur le système, la force globale que celui-ci subit, appelée **résultante** des forces exercées, est la somme vectorielle de ces forces :

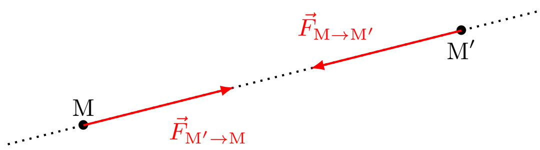
$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j}$$

1.2 Loi des actions réciproques (troisième loi de Newton)

Loi des actions réciproques (3$^{\text{e}}$ loi de Newton)

Si M′ exerce sur M une force $\vec{F}_{\mathrm{M'\to M}}$, alors M exerce sur M′ une force $\vec{F}_{\mathrm{M\to M'}}$ de **même droite d'action** et telle que :

$$\vec{F}_{\mathrm{M\to M'}} = -\vec{F}_{\mathrm{M'\to M}}$$



Pourquoi on ne passe pas à travers le plancher ?

Notre poids nous tire vers le bas... pourquoi ne va-t-on pas au centre de la Terre ?
Que se passerait-il si le sol de la salle était en papier ?

Application 1 : saut en hauteur

Quelle est la force qui nous pousse vers le haut quand on fléchit les genoux et qu'on saute vers le haut ?

1.3 Condition d'équilibre d'un système

Équilibre mécanique

Un système est à l'équilibre mécanique s'il n'est animé d'aucun mouvement.

Condition nécessaire de l'équilibre

Si un système est à l'équilibre, alors la résultante des forces que le monde extérieur exerce sur lui est nulle :

$$\boxed{\text{système à l'équilibre} \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}}$$

Attention ! c'est une implication et non une équivalence : si on sait que le système est à l'équilibre, alors on est certain que la résultante des forces sur lui est nulle. En revanche, si on sait que $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$, alors trois situations sont possibles :

- il est à l'équilibre,
- il se déplace à vecteur vitesse constant [1]
- il reste au même endroit mais il tourne sur lui même [2].

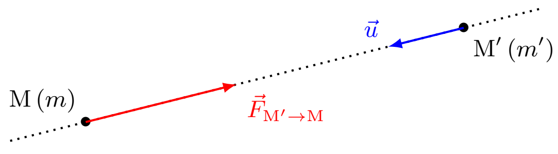
2 Forces à distance

2.1 Interactions gravitationnelle

Interaction gravitationnelle sur un point matériel

La force exercée par une masse m' en M$'$ sur une masse m en M est de la forme :

$$\vec{F}_{\mathrm{M'}\to\mathrm{M}} = -\frac{\mathcal{G}\, m\, m'}{r^2}\vec{u}$$



avec :

- r la distance entre les masses,
- $\vec{u}$ le **vecteur unitaire** (tel que $\|\vec{u}\| = 1$), porté par la droite (MM$'$) et dirigé de M$'$ vers M,
- $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Nature attractive de l'interaction gravitationnelle

L'interaction gravitationnelle est **toujours attractive** : la force que m' exerce sur m est dirigée vers m'.

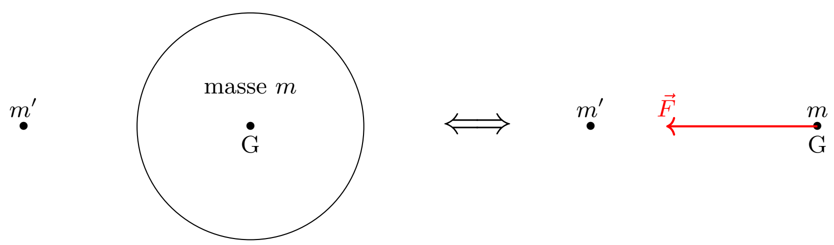
Attention ! Le signe $\ominus$ dans la formule n'existe pas si on oriente le vecteur unitaire dans l'autre sens !

Application 2 : interaction gravitationnelle entre deux électrons

Deux électrons dans un atome sont typiquement à une distance de l'ordre de 0,1 nm. Sachant que la masse d'un électron est $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, calculer la force gravitationnelle qu'ils exercent l'un sur l'autre.

Centre de masse (centre de gravité)

Vis-à-vis de l'interaction gravitationnelle, tout corps de masse totale m se comporte comme si toute sa masse était concentrée en un point appelé son **centre de masse**.



1. C'est un mouvement rectiligne uniforme. Cette propriété est connue sous le nom de principe d'inertie ou première loi de Newton, et sera reprise dans le chapitre 3 du cours de mécanique.
2. Ce cas est complètement hors programme.

Position du centre de masse

Si la masse du corps est répartie symétriquement, le centre de masse est situé au centre géométrique du corps.
Si la masse est inégalement répartie, le centre de masse est situé du côté le plus dense,.

Application à l'interaction gravitationnelle

La formule de l'interaction gravitationelle reste valable en remplaçant les points M et M′ par les centres de masse G et G′ des deux corps.

Application 3 : interaction gravitationnelle entre deux astres

Calculer l'interaction gravitationnelle subie par la Terre de la part du Soleil et de la Lune. Quelle influence, visible ou invisible, ces deux astres ont-ils sur notre planète ?

astre	Terre	Lune	Soleil
masse (kg)	$5{,}9748 \cdot 10^{24}$	$7{,}348 \cdot 10^{22}$	$1{,}989 \cdot 10^{30}$
distance du centre au centre de la Terre (km)		384400	$150 \cdot 10^{6}$

2.2 Poids d'un corps au voisinage d'un astre

Poids

Le poids désigne la force que subit un corps de masse m au voisinage immédiat d'un astre :

$$\boxed{\vec{F} = m \times \vec{g}}$$

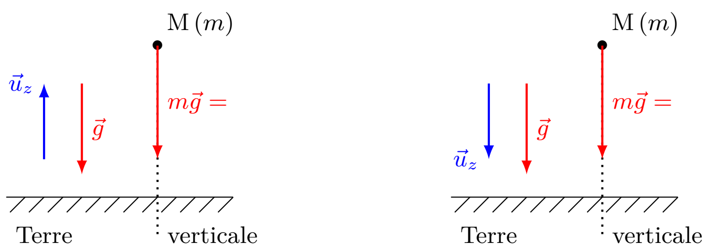
où $\vec{g}$ est le champ de pesanteur de l'astre.

Champ de pesanteur terrestre

Pour la Terre, $\vec{g}$ est dirigé quasiment vers le centre de la Terre et a une intensité quasiment uniforme à la surface de la Terre : $g \approx 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Verticale d'un lieu

La direction du poids définit la verticale en un lieu donné.



L'action mécanique sur une masse dans son entourage de la Terre comporte deux termes :
- principalement l'attraction gravitationnelle exercée par la masse de la Terre,
- minoritairement l'influence de la rotation de la Terre sur elle-même.

Application 4 : lien entre interaction gravitationnelle et champ de pesanteur

En supposant que l'interaction gravitationnelle est la principale cause du champ de pesanteur, retrouver la valeur de g à la surface de la Terre, sachant que la masse de la Terre est $5{,}9748 \cdot 10^{24}$ kg et que le rayon terrestre est 6440 km.

Application 5 : variation du champ de pesanteur avec l'altitude

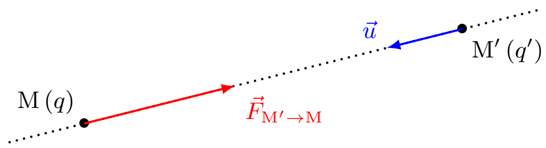
Déterminer à quelle altitude le champ de pesanteur terrestre est 1% plus faible qu'à la surface.

2.3 L'interaction électrostatique ou interaction de Coulomb

Interaction de Coulomb

La force exercée par une charge q' en M′ sur une charge q en M est de la forme :

$$\vec{F}_{\mathrm{M'}\to\mathrm{M}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q'}{r^2}\vec{u}$$



avec :
- r la distance entre les masses,
- $\vec{u}$ le **vecteur unitaire** (tel que $\|\vec{u}\| = 1$), porté par la droite (MM′) et dirigé de M′ vers M,
- π le nombre mathématique habituellement noté ainsi,
- ε_0 une constante universelle appelée la permittivité du vide, avec $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9\ \mathrm{J \cdot m \cdot C^{-1}}$.

L'interaction de coulomb peut être attractive ou répulsive

L'interaction entre deux charges est :
- **attractive** si les charges sont de **signes opposés**, soit $qq' < 0$,
- **répulsive** si les charges sont de **même signe**, soit $qq' > 0$.

Attention ! Il apparait un signe ⊖ dans la formule si on oriente le vecteur unitaire dans l'autre sens !

Application 6 : interaction coulombienne entre deux électrons

Deux électrons dans un atome sont typiquement à une distance de l'ordre de 0,1 nm. Sachant que leur charge est $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, estimer l'interaction électrostatique entre eux. Comparer à l'interaction gravitationnelle entre eux (application n°2).

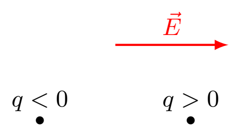
2.4 Force électrique

De même que les masses de toutes les particules de la Terre créent un champ de pesanteur qui agit sur une masse, des charges présentes dans une zone de l'espace créent un champ électrique qui agit sur une charge.

Force subie par une charge dans un champ électrique

Dans une zone de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}$, une charge électrique q est soumise à la force électrique :

$$\vec{F} = q \times \vec{E}$$



3 Forces élastiques

3.1 Élasticité linéaire d'un matériau

Élasticité

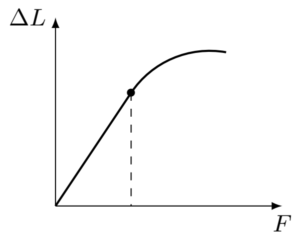
On dit qu'un matériau est **élastique** si, après déformation sous l'effet d'une action mécanique, il revient à sa forme initiale lorsque cette action cesse.

Domaine élastique

Le domaine élastique correspond à la gamme de déformations pour laquelle le matériau est élastique. Au-delà de la limite d'élasticité, la déformation est irréversible.

Élasticité linéaire

L'élasticité est dite linéaire lorsque, dans le domaine d'élasticité du matériau, la déformation est proportionnelle à la force appliquée.



Le domaine d'élasticité correspond usuellement à une déformation de quelques pourcents.

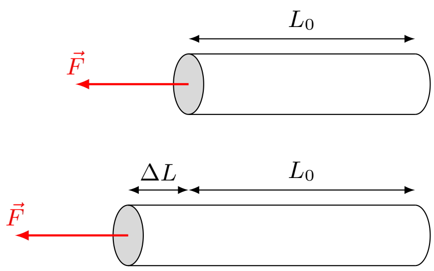
Module de Young

Soit un matériau de section S et de longueur L. On applique une force F (en compression ou en extension) sur la section S, et on mesure une variation de longueur (allongement ou rétrécissement) ΔL. Dans le domaine d'élasticité linéaire, on a :

$$\sigma = E \times \varepsilon$$

avec :

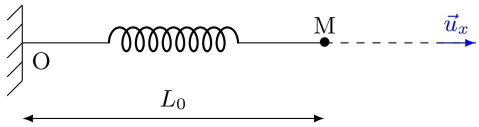
- $\sigma = F/S$ la contrainte,
- $\varepsilon = |\Delta L|/L_0$ l'allongement relatif,
- E le module de Young.



3.2 Force de rappel d'un ressort

Ressort

Un matériau élastique peut être modélisé par un ressort à spires, c'est-à-dire un enroulement en spirale d'un matériau linéaire (métal, béton, polymère).

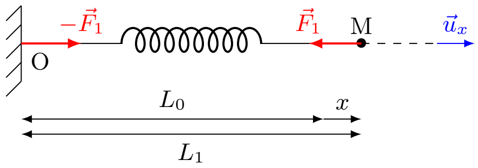


Un ressort est caractérisé par :

- sa **longueur à vide** L_0, qui est sa longueur lorsqu'aucune force ne lui est appliquée,
- sa **constante de raideur** k, qui caractérise son élasticité.

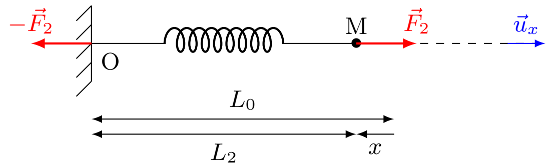
Si on allonge un ressort jusqu'à la longueur $L_1 > L_0$, celui-ci exerce sur ses deux extrémité une force de rappel qui tend à le faire revenir à sa longueur à vide. Dans le domaine d'élasticité :

$$\vec{F}_1 = -k\,(L_1 - L_0)\,\vec{u}_x$$



Si on comprime un ressort jusqu'à $L_2 < L_0$, celui-ci exerce sur ses deux extrémité une force de rappel qui tend à le faire revenir à sa longueur à vide. Dans le domaine d'élasticité :

$$\vec{F}_2 = k\,(L_0 - L_2)\,\vec{u}_x = -k\,(L_2 - L_0)\,\vec{u}_x$$



Loi de Hooke

Un ressort de longueur à vide L_0 déformé jusqu'à une longueur $L \neq L_0$ exerce sur ses deux extrémité une **force de rappel**. Dans le domaine d'élasticité, la force de rappel obéit à la **loi de Hooke** :

$$\boxed{\vec{F} = -k\,(L - L_0)\,\vec{u}_x = -k\,x\,\vec{u}_x}$$

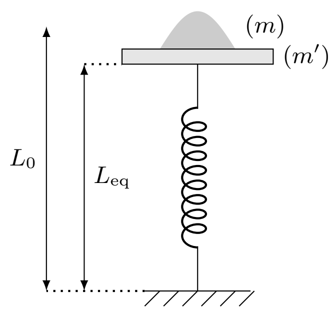
avec :
- x l'allongement algébrique,
- k la constante de raideur du ressort en newton/m,
- $\vec{u}_x$ un vecteur unitaire.

Sens de la force de rappel

La force de rappel est toujours dirigée dans le sens d'une retour à la longueur à vide. Le signe dans la formule doit être systématiquement adapté au sens du vecteur unitaire choisi.

Position d'équilibre d'un plateau de balance

Le plateau d'une balance, de masse m', est soutenu par un ressort vertical de longueur à vide L_0, de constante de raideur k et de masse négligeable. On pose sur le plateau un objet de masse m, et on attend la stabilisation du plateau. On cherche à déterminer la longueur du ressort, qui reste vertical, lorsque l'équilibre est atteint.

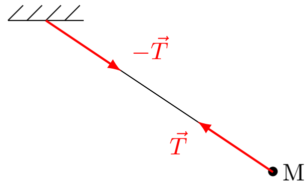


4 Force de contact entre deux solides

4.1 Tension d'un fil inextensible

Tension d'un fil

Un fil inextensible est un système linéaire sans forme propre et de longueur constante (donc non élastique). Lorsqu'il est tendu, il exerce sur chacune de ses extrémités une force $\vec{T}$ appelée la **tension** du fil.

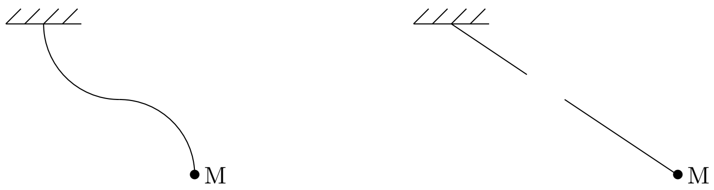


La tension n'a pas de valeur *a priori*

La tension exercée par le fil dépend des autres forces qui s'exercent.
Il existe une valeur maximale de la tension, au-delà de laquelle le fil est se rompt.

Conséquence : la tension est toujours une inconnue dans un problème.

Si la tension d'un fil est nul, alors :
- soit le fil n'est pas tendu,
- soit le fil est rompu.

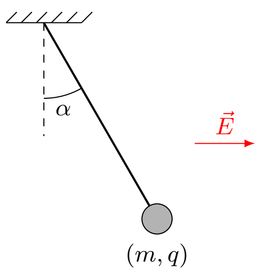


Fil à plomb

Un plomb de masse m est suspendu à un fil sans masse et inextensible. L'ensemble est au repos. Quelle est la tension du fil ? Quelle est la force que l'opérateur qui le tient à son extrémité supérieure exerce sur le fil ?

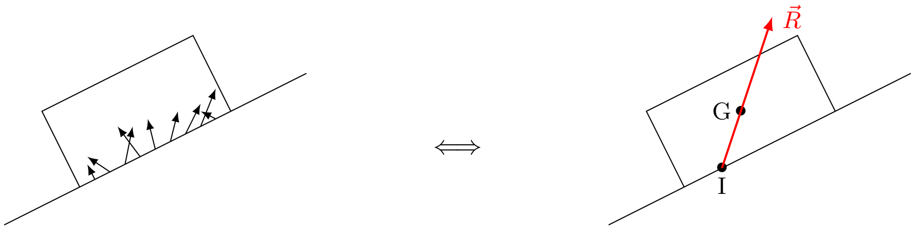
Équilibre à trois forces

Une petite sphère de masse m et portant une charge électrique q est suspendue à un fil sans masse inextensible dans une zone où règne un champ électrique $\vec{E}$ horizontal. Montrer que, m et E étant connus, la mesure de l'angle que fait le fil avec la verticale permet de déterminer la charge q.



4.2 Réaction d'un support solide ; lois de Coulomb

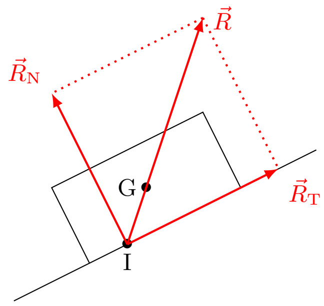
Un solide posé sur un support solide subit de la part de celui-ci un très grand nombre de forces répulsives au niveau de la surface de contact, qu'on peut modéliser par une force unique : la réaction du support.



Réaction d'un support solide sur un solide

La **réaction** du support est la force globale que le support exerce sur un solide posé sur lui.

- Son point d'application est un point du support.
- Son sens est toujours de la surface de contact vers le solide.
- Sa direction et sa norme dépendent ne sont pas connue *a priori* et dépendent des autres contraintes.



Décomposition de la réaction

La réaction du support est la somme de deux termes : une **composante normale** orthogonale à la surface de contact $\vec{R}_\mathrm{N}$ et une **composante tangentielle** parallèle à la surface de contact $\vec{R}_\mathrm{T}$:

$$\boxed{\vec{R} = \vec{R}_\mathrm{N} + \vec{R}_\mathrm{T}}$$

La composante normale $\vec{R}_\mathrm{N}$ est toujours non nulle et molélise simplement le fait que le solide ne passe pas à travers le support.

La composante tangentielle peut être nulle ou non nulle

Si $\vec{R}_\mathrm{T} = \vec{0}$, la réaction est purement normale $\vec{R} = \vec{R}_\mathrm{N}$ et n'a aucune influence sur le mouvement éventuel du solide le long du support.

Si $\vec{R}_\mathrm{T} \neq \vec{0}$, il existe des **frottements solides**, qui s'opposent au mouvement réel ou potentiel. Dans le cas de l'équilibre, $\vec{R}_\mathrm{T}$ s'oppose à la descente et est dirigée vers le haut.

Loi de Coulomb dans le cas de l'équilibre

Si le solide est immobile par rapport au support, la réaction tangentielle **ne peut pas dépasser une valeur limite** telle que :

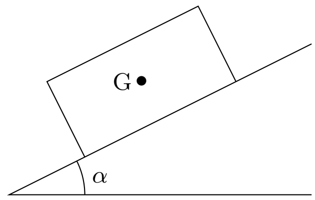
$$\boxed{\left\|\vec{R}_\mathrm{T}\right\|_\mathrm{max} = f_0 \left\|\vec{R}_\mathrm{N}\right\|} \quad \text{soit} \quad \boxed{\left\|\vec{R}_\mathrm{T}\right\| \leq f_0 \left\|\vec{R}_\mathrm{N}\right\|}$$

avec f_0 est le **coefficient de frottement statique** (sans unité) qui dépend de la nature chimique et de l'état de surface du solide et du support.

Équilibre d'un solide sur un pan incliné

Un solide de masse m est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.

Déterminer les valeurs des réactions normales et tangentielles. Comment évoluent-elles lorsqu'on augmente α ?



Angle limite d'équilibre

Sachant que le solide se met en mouvement pour $\alpha = 6°$, que vaut le coefficient de frottement statique f_0 ?

Déterminer si on est dans une situation d'équilibre

Un solide de masse $m = 3{,}0\,\mathrm{kg}$ est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement statique est $f_0 = 0,21$. Déterminer si le solide est à l'équilibre dans les deux situations suivantes :

- $\alpha = 8°$
- $\alpha = 14°$

Mise en mouvement de glissement

Lorsque la situation d'équilibre impliquerait que $\left\|\vec{R}_\mathrm{T}\right\| > \left\|\vec{R}_\mathrm{T}\right\|_{\max}$, alors l'équilibre n'est plus possible le solide se met en mouvement le long du support.

Loi de Coulomb dans le cas du glissement

Lorsque le solide est en *mouvement de glissement* sur le support, alors la réaction tangentielle est **indépendante de la vitesse** et vérifie :

$$\boxed{\left\|\vec{R}_\mathrm{T}\right\| = f\left\|\vec{R}_\mathrm{N}\right\|}$$

où f est le **coefficient de frottement dynamique** (sans unité) qui dépend de la nature chimique et de l'état de surface du solide et du support.

Comparaison des coefficients de frottement statique et dynamique

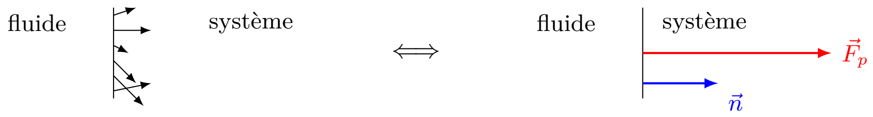
Le coefficient de frottement dynamique est toujours inférieur au coefficient de frottement statique : $f < f_0$. Il est plus facile d'entretenir un mouvement de glissement que de l'initier.

Remarque. Si le solide se déplace *sans glissement*, ce qui peut correspondre à un roulement ou à un pivotement, alors $\left\|\vec{R}_\mathrm{T}\right\| < f\left\|\vec{R}_\mathrm{N}\right\|$.

5 Forces de contact entre un fluide et un solide

5.1 Force pressante exercée par un fluide au repos

Un solide en contact avec un fluide au repos subit un très grand nombre d'actions méaniques dues aux chocs entre les molécules du fluide sur la surface du solide. Ces actions sont modélisées par une force appelée **force pressante**.



Force pressante sur une surface plane soumise à une pression uniforme

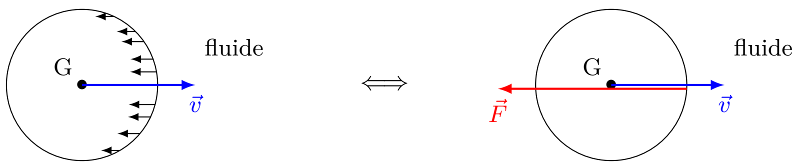
Dans le cas d'une surface de contact plane, d'aire S, et si la pression P du fluide au repos est uniforme, la force pressante est :

$$\boxed{\vec{F}_p = P \times S \times \vec{n}}$$

avec $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à la surface et dirigé du fluide vers le solide.

5.2 Force de frottement fluide

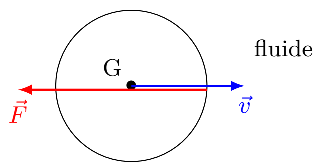
Un solide qui se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ dans un fluide immobile (liquide ou gaz) subit une multitude d'actions mécaniques dues aux chocs avec les molécules de fluide, modélisable par une force unique appelée la **force de frottement fluide**.



Force de frottement fluide linéaire en vitesse

À faible vitesse, la force de frottement subie par un solide en mouvement relatif de vitesse $\vec{v}$ par rapport à un fluide est :

$$\boxed{\vec{F} = -\alpha\,\vec{v}}$$



telle que :
- elle est toujours dirigée dans le sens opposé au déplacement,
- son point d'application est un point de la surface de contact,
- α est le **coefficient de frottement fluide** en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Frottement fluide non linéaire en vitesse

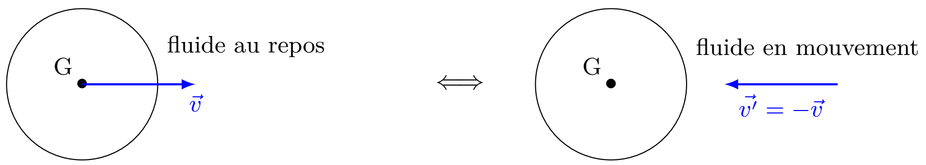
Lorsque la vitesse relative devient élevée, la force de frottement fluide devient proportionnelle au carré de la vitesse relative : $\left\|\vec{F}\right\| = \alpha v^2$.

Application 7 : unité du coefficient de frottement fluide

Déterminer l'unité de α pour une force de frottement fluide proportionnelle au carré de la vitesse.

Le coefficient de frottement fluide α dépend à la fois du solide et du fluide :
- il est d'autant plus grand que le fluide est visqueux ;
- il est d'autant plus grand que la section du cylindre de fluide perturbé est grande, c'est-à-dire que la surface de solide exposée aux chocs est grande ;
- il dépend de la forme générale du solide (aérodynamisme)[3].

Remarque : le problème est identique au cas d'un solide immobile dans un fluide en mouvement avec une vitesse $\vec{v'} = -\vec{v}$. Ce qui compte est la vitesse relative du solide par rapport au fluide.



3. C'est bien la forme globale du solide qui compte, et pas seulement celle de la face exposée au fluide. Les problèmes d'aérodynamisme sont très complexes et dépendent de la façon dont le fluide s'écoule le long du solide, et dont il se comporte à l'arrière du solide (en particulier s'il se forme des tourbillons). Cela relève de la dynamique des fluides, qui n'est pas au programme de première année.

Exercices

Application directe du cours

Exercice 1 : comparaison des interactions gravitationnelle et électromagnétique

On considère un proton (masse m_p) en interaction avec un électron (masse m_e). Comparer les intensités de la force gravitationnelle et de la force de Coulomb que l'un exerce sur l'autre. Conclure.

Exercice 2 : variation du champ de pesanteur avec l'altitude

On assimile le champ de pesanteur au voisinage d'un astre uniquement à l'attraction gravitationnelle qu'il exerce, et on néglige la composante liée à son mouvement.

1. Quelle est alors d'expression du champ de pesanteur en fonction de l'altitude par rapport à la surface de l'astre ? Comment évolue-t-il quand on prend de l'altitude ? Quelle est la conséquence pour les spationautes qui séjournent dans la station spatiale internationale ?
2. Évaluer quelle doit être la taille maximale d'un système pour qu'on puisse considérer que le champ de pesanteur qu'il subit est constant à 1% près ?

Exercice 3 : tourisme spatial

Comparer les champs de pesanteur à la surface de la Terre et de la Lune. Quelle est la conséquence ludique pour les touristes sur la Lune ?

Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$
Permittivité électrique : $\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 9{,}0 \cdot 10^{9}$ (unités SI)
Charge élémentaire : $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

Masse de l'électron : $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Masse du proton : $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Masse du Soleil : $M_\mathrm{S} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Masse de la Terre : $M_\mathrm{T} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Masse de la Lune : $M_\mathrm{L} = 7{,}34 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$

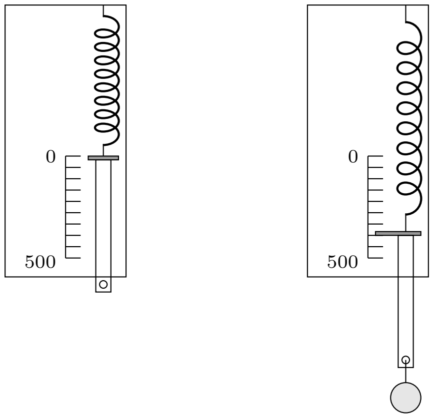
Distance Terre-Soleil : $d_\mathrm{TS} = 150 \cdot 10^{6}\,\mathrm{km}$
Distance Terre-Lune : $d_\mathrm{TL} = 383\,400\,\mathrm{km}$
Rayon de la Terre : $R_\mathrm{T} = 6400\,\mathrm{km}$
Rayon de la Lune : $R_\mathrm{L} = 1740\,\mathrm{km}$

Exercice 4 : tension d'un fil

On considère un fil de masse négligeable accroché à un plafond. On accroche une masse ponctuelle $m = 200\,\mathrm{g}$ à l'autre extrémité du fil. Déterminer la force que le plafond exerce sur le fil.

Exercice 5 : dispositif de pesée

Un dispositif de pesée est constitué d'un ressort de constante de raideur k, derrière lequel est fixé un support comportant des graduations en grammes. Le dispositif étant maintenu vertical et en l'absence d'objet accroché à son extrémité, celle-ci se trouve à la graduation 0. La graduation maximale correspond à l'indication 500 g. L'échelle graduée entre 0 et 500 g a une longueur de 10 cm.

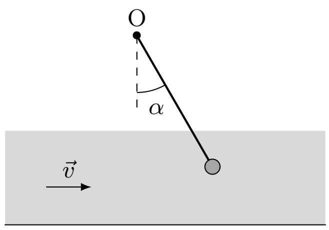


1. Établir la relation entre l'allongement du ressort et la masse accrochée à son extrémité.
2. Déterminer la valeur de k.

Entrainement

Exercice 6 : mesure de la vitesse d'un fluide

Pour mesurer la vitesse d'un fluide s'écoulant horizontalement avec une vitesse $\vec{v}$, on imagine le dispositif suivant. On attache une petite sphère de rayon R et de masse m à l'extrémité inférieure d'un fil inextensible dont l'extrémité supérieure est attachée à un point fixe. La masse est plongée dans l'eau et on mesure l'angle que fait le fil avec la verticale lorsque le système a atteint sa position d'équilibre.



On admet que la force de frottement fluide s'exerçant sur la sphère de rayon R est proportionnelle à la vitesse relative du fluide par rapport à la sphère, avec un coefficient de proportionnalité obéissant à la loi de Stokes : $\|\vec{F}\| = 6\pi\eta R \times \|\vec{v}\|$, où η est la viscosité du fluide.

1. Définir le système d'étude ; faire l'inventaire des forces qui s'y appliquent. Choisir un repère adapté au problème.
2. Écrire la condition d'équilibre, et montrer qu'on peut déterminer la vitesse d'écoulement du fluide connaissant les caractéristiques de la sphère et l'angle α.
3. Le fluide est de l'eau et on utilise une bille en acier. Calculer la vitesse que devrait avoir le fluide pour observer un angle de 5°.
4. Le dispositif vous parait-il intéressant ? Est-il possible de le rendre plus performant ? Discuter.

Champ de pesanteur terrestre : $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$
Viscosité de l'eau : $\eta = 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s^{-1}}$
Masse volumique de l'acier : $\rho = 7{,}8 \cdot 10^{3}\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
Diamètre de la bille : $2R = 1\,\mathrm{cm}$

Exercice 7 : association de ressorts en parallèle

On considère deux ressorts de longueurs à vide identiques L_0 et de constantes de raideur k_1 et k_2. Les deux ressorts sont horizontaux et associés en parallèle : ils sont tous les deux liés à un support fixe d'une part et à un solide d'autre part. Le solide est écarté du support de sorte que les deux ressorts aient la même longueur $L > L_0$.

1. Exprimer les forces de rappel exercées par les deux ressorts sur le système matériel, puis la force totale exercée par les deux ressorts.
2. Montrer que tout se passe comme si le solide étant soumis à la force de rappel d'un ressort unique dont on précisera les caractéristiques.

Exercice 8 : association de ressorts en série

On considère deux ressorts de longueurs à vide L_{01} et L_{02}, et de constantes de raideur k_1 et k_2. Les deux ressorts sont horizontaux et associés en série : le premier ressort relie un support fixe à l'extrémité du second ressort, lui-même lié à un solide à l'autre extrémité. Le solide est positionné de sorte que les deux ressorts aient une longueur différente de leur longueur à vide.

1. Quelle est la relation entre les forces de rappel des deux ressorts ? On pourra raisonner au point de contact entre eux. Indice [4].
2. On admet que l'ensemble des deux ressorts peut être modélisé par un ressort équivalent de longueur à vide L_0 et de constante de raideur k. Justifier que $L_0 = L_{01} + L_{02}$, et déterminer k. Indice [5].

Exercice 9 : importance du frottement

On considère une roue en contact avec le sol. La roue est mise en rotation.

1. Supposons d'abord que le contact de la roue avec le sol se fasse sans frottement. Représenter la force exercée par le sol sur la roue. Dans le cas où la situation est la même pour toutes les roues d'un véhicule, que se passe-t-il ? À quelle situation pratique cela correspond-il ?

2. On suppose maintenant que le contact se fait avec frottements. Sur un dessin, préciser le sens de rotation de la roue, et schématiser la force que celle-ci exerce sur le sol. En déduire la force exercée par le sol sur la roue. Pourquoi le véhicule avance-t-il ? A-t-on intérêt à réduire ou augmenter les frottements ?

---

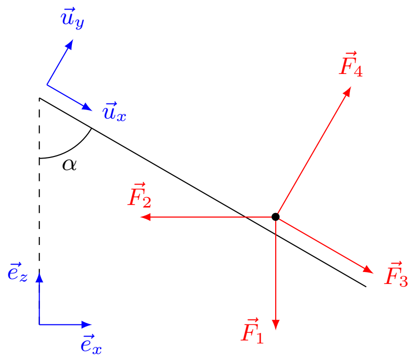
4. Si un des deux ressorts est en extension, qu'en est-il de l'autre ? Utiliser le principe des actions réciproque.

5. Le ressort équivalent exerce sur le solide la même force que l'ensemble des deux ressorts réels... sinon, ce ne serait pas un ressort équivalent !

Travaux dirigés

Exercice 1 : projection de vecteurs

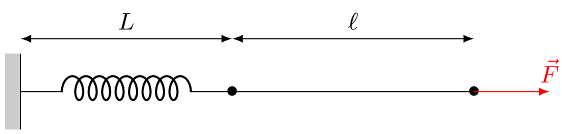
1. Projeter les vecteurs $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ et $\vec{F}_4$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$.
2. Projeter les vecteurs $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ et $\vec{F}_4$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$.



Exercice 2 : résistance d'un système fil-ressort

On dispose d'un ressort de longueur à vide L_0 et de constante de raideur k, et d'un fil de nylon inélastique de longueur ℓ, de section S et de résistance à la traction σ_{max}. La résistance à la traction mesure la contrainte (force surfacique) maximale que peut supporter le dispositif lorsqu'on tire sur lui dans le sens de la longueur. Le ressort reste dans sa limite d'élasticité tant que la déformation ne dépasse pas 10%. Le ressort et le fil sont de masse négligeable.

On accroche une extrémité du ressort à une paroi ; à l'autre extrémité du ressort, on accroche le fil de nylon sur lequel un opérateur tire avec une force $\vec{F}$. L'ensemble est parfaitement aligné, et on suppose que l'opérateur tire très lentement, de sorte qu'on soit quasiment à l'équilibre à tout instant.

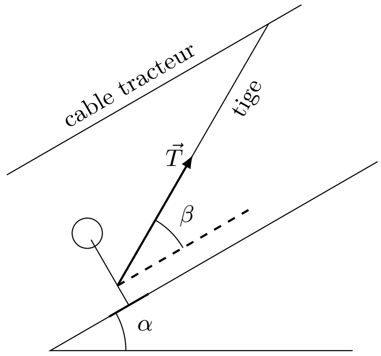


1. Calculer la tension maximale que peut subir le fil sans casser.
2. Calculer la force de rappel du ressort lorsqu'il est à la limite de son domaine d'élasticité.
3. Peut-on déformer le ressort jusqu'à sa limite d'élasticité sans casser le fil ?
4. Déterminer le rayon maximal que doit avoir le fil pour que celui-ci casse avant que le ressort ne soit déformé à sa limite d'élasticité.

$L_0 = 10\,\text{cm}$ $\quad S = 2\,\text{mm}^2$
$k = 200\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ $\quad \sigma_{\text{max}} = 70\,\text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$

Exercice 3 : démarrage d'un skieur

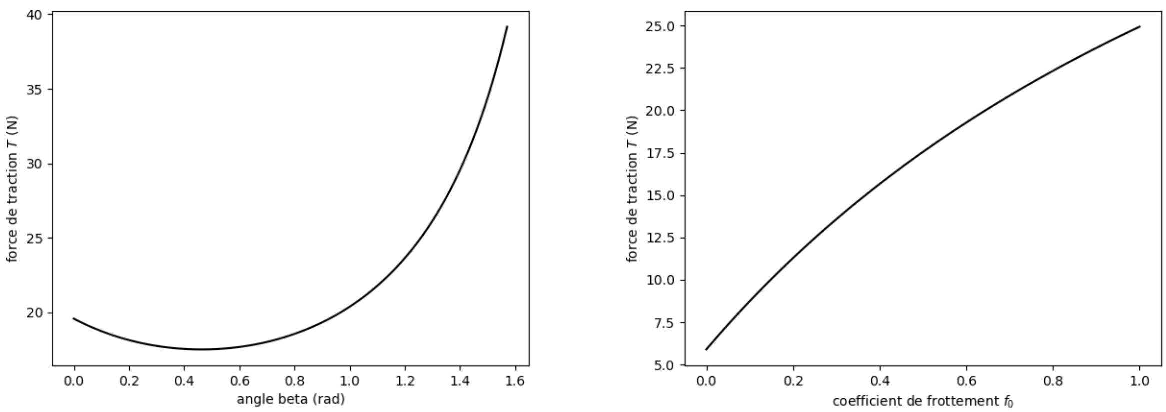
Un skieur, de masse $m = 80\,\text{kg}$ est au repos sur une suface de neige, inclinée d'un angle $\alpha = 10°$ par rapport à l'horizontale. Au départ, il n'a pas encore saisi la perche du remonte-pente.



1. Exprimer les réactions normale et tangentielle. Comment R_T évolue-t-elle avec α ?
2. Que peut-on déduire sur la valeur du coefficient de frottement statique ?

Le skieur prend la perche du remonte pente, inclinée d'un angle β par rapport à la surface du sol.

3. Analyser soigneusement les forces en présence, en comparant au cas précédent.
4. Exprimer la force de traction T que le cable doit exercer sur le skieur pour le faire démarrer, en fonction du coefficient de frottement statique f_0.
5. Analyser l'influence de f_0 et β sur T.



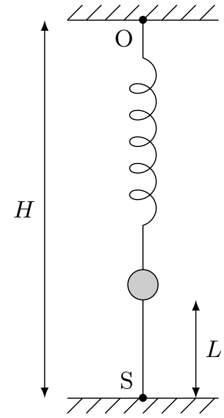
(a) T en fonction de β pour $f_0 = 0,5$

(b) T en fonction de f_0 pour $\beta = 30°$

FIGURE 1 – Influence de f_0 et β sur la force de traction T.

Exercice 4 : équilibre d'une sphère

On considère un ressort de longueur à vide L_0 et de constante de raideur k, accroché à un support par son extrémité supérieure O. À l'autre bout du ressort est accrochée une sphère de masse m. Cette sphère est en outre liée par un fil inextensible de longueur L à un point du sol S. L'ensemble est vertical, et la distance entre S et O vaut H.



1. Comment est le fil si $L + L_0 > H$?

Dans la suite, on suppose que $L + L_0 < H$.

2. Dans le cas où le fil est tendu, écrire la condition d'équilibre de la sphère.
3. En déduire à quelle condition sur k le fil est tendu.