

### 3 – DYNAMIQUE DU POINT

La dynamique est née en tant que science avec GALILÉE (1564 - 1642), qui a étudié expérimentalement la chute libre et le pendule, et correctement identifié les différents paramètres mis en jeu, en particulier les frottements. Il s'est donc intéressé non pas seulement au mouvement lui-même, mais aussi à ses causes. À la suite des travaux de GALILÉE, mais aussi des observations astronomiques disponibles à l'époque, Isaac NEWTON (1642 - 1727) a énoncé le principe fondamental de la dynamique en 1687. Il donna ainsi une base théorique solide à la dynamique, en introduisant le concept de force, et en le reliant à l'accélération du mobile. L'énoncé de cette loi a également été le point de départ de la mathématisation de la physique, avec l'introduction des concepts de dérivée et d'intégration, conjointement par NEWTON et du philosophe et mathématicien allemand Gottfried LEIBNIZ (1646 - 1716).

Jusqu'au 19<sup>e</sup> siècle, la mécanique newtonienne n'a jamais été remise en cause, tant ses succès ont été éclatants. Par exemple, c'est avec les lois de la dynamique – et de solides capacités en calcul! – que l'astronome français Urbain LE VERRIER postule l'existence et détermine la position d'une huitième planète pour expliquer les anomalies de la trajectoire d'Uranus, découverte par William HERSCHEL en 1781. LE VERRIER expose ses résultats devant l'Académie des sciences le 31 août 1846, et Neptune est observée à l'endroit prédit (à 1° près) par l'astronome allemand Johann GALLE le soir même où lui parvient l'information, dans la nuit du 23 au 24 septembre 1846. LE VERRIER est également le fondateur du premier réseau de stations météorologiques en France, et l'éditeur du premier bulletin météo.

Vers la fin du 19<sup>e</sup> siècle, il est apparu que la théorie de NEWTON n'est que le cas particulier, valable aux faibles vitesses, d'une théorie plus générale. En effet, aux grandes vitesses, ou si on désire une précision très importante (dans les problèmes de repérage satellitaire par exemple), il faut tenir compte du fait que le temps dépend lui-même de la position de l'observateur. On est alors dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte, qui a été énoncée indépendamment par Albert EINSTEIN et Henri POINCARÉ, et a ensuite été complétée par la théorie de la relativité générale de EINSTEIN. Cette théorie, d'une complexité mathématique extrême, est très puissante, puisqu'elle est à la fois explicative et prédictive; elle n'a pour l'instant pas été mise en défaut.



Isaac NEWTON (1643 - 1727)  
physicien anglais



Urbain LE VERRIER (1811 - 1877)  
astronome et météorologue français

## Plan du chapitre

<b>1</b>	<b>Quantité de mouvement</b>	<b>3</b>
1.1	Quantité de mouvement d'un système	3
1.2	Conservation de la quantité de mouvement	3
<b>2</b>	<b>Principe fondamental de la dynamique</b>	<b>5</b>
2.1	Variation de la vitesse d'un solide	5
2.2	Deuxième loi de Newton	5
2.3	Principe d'inertie	6
<b>3</b>	<b>Exemples d'application</b>	<b>6</b>
3.1	Principe de la résolution des exercices	6
3.2	Exemple 1 : arrêt d'une particule chargée	7
3.3	Exemple 2 : glissement d'un pavé	8
3.4	Exemple 3 : tir d'un projectile	10
3.5	Exemple 4 : chute d'une goutte de pluie	12

Programme officiel – Premier semestre – **Thème M – mouvements et interactions**

NOTIONS	CAPACITÉS EXIGIBLES
<b>M.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point</b> <b>Cinématique du point</b> Mouvement de vecteur accélération constant.	Établir l'expression de la vitesse et de la position en fonction du temps. Déterminer la vitesse en une position donnée. Obtenir l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
<b>M.2.1. Quantité de mouvement d'un système matériel</b> Quantité de mouvement d'un système matériel.	Utiliser la relation entre la quantité de mouvement d'un système matériel et la vitesse de son centre de masse.
<b>M.2.2. Lois de Newton</b> Deuxième loi de Newton.	Utiliser la deuxième loi de Newton dans des situations variées.
<b>Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme.</b> Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme.  Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute. Vitesse limite.  Modèle du frottement de glissement : lois de Coulomb.	Établir et exploiter les équations horaires du mouvement. Établir l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.  Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement. Exploiter une équation différentielle sans la résoudre analytiquement, par exemple : écriture sous forme adimensionnée, analyse en ordres de grandeur, existence d'une vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par résolution numérique.  Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations suivantes : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non), et la valider.

L'auteur du présent document vous autorise à le partager, reproduire, distribuer et communiquer selon les conditions suivantes :



- BY** Vous devez le citer en l'attribuant de la manière indiquée par l'auteur (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'il approuve votre utilisation de l'œuvre).
- NC** Vous n'avez pas le droit d'utiliser ce document à des fins commerciales.
- SA** Vous avez le droit de le modifier, de le transformer ou de l'adapter, sous les mêmes conditions de partage et d'utilisation que le présent document.

Consulter la licence creative commons complète en français :  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr>

# 1 Quantité de mouvement

L'ensemble du cours mécanique se réduit aux systèmes vérifiant les hypothèses restrictive suivantes :

- les objets étudiés sont des solides indéformables de masse  $m$  constante,
- les vitesses sont non relativistes :  $v \ll c$  ( $c$  vitesse de la lumière).

## 1.1 Quantité de mouvement d'un système

La **quantité de mouvement**, ou **impulsion**, d'un objet de masse  $m$  et animé d'une vitesse  $\vec{v}$  est par définition la grandeur vectorielle :

$$\boxed{\vec{p} = m \vec{v}} \quad (1)$$

La quantité de mouvement est une grandeur additive. Pour un système constitué de  $N$  systèmes ponctuels, la quantité de mouvement totale est :

$$\vec{p} = \sum_{j=1}^N \vec{p}_j = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j$$

Pour un système non ponctuel de masse totale  $M$  et de centre de masse  $G$ , la quantité de mouvement totale est :  $\vec{p} = M \times \vec{v}_G$ , où  $\vec{v}_G$  la vitesse du centre de gravité du système. Pour un solide indéformable en translation, cela résulte directement de l'additivité de la quantité de mouvement. Toutes les parties du système ont la même vitesse  $\vec{v}$  si le système est indéformable et en translation, et c'est en particulier celle de  $G$  ; on peut alors écrire que pour n'importe quelle partie élémentaire du système de masse  $dm$ , la quantité de mouvement est  $d\vec{p} = dm \vec{v}$ . La quantité de mouvement totale est alors :

$$\vec{p} = \int_{\text{syst}} d\vec{p} = \int_{\text{syst}} dm \vec{v} = \vec{v} \int_{\text{syst}} dm = M \vec{v} = M \vec{v}_G$$

## 1.2 Conservation de la quantité de mouvement

Contrairement à la masse ou à la vitesse, on constate que la quantité de mouvement est un invariant au cours d'une transformation d'un système physique isolé ou pseudo-isolé<sup>1</sup>.

Pour un système isolé ou pseudo-isolé, la quantité de mouvement totale  $\vec{p}$  est constante au cours du mouvement.

La conservation de la quantité de mouvement n'est pas démontrée ; c'est un principe jusqu'à présent jamais mis en défaut, dont on peut montrer qu'il est équivalent au principe d'inertie. Une conséquence amusante est l'expérience de Tsiolkovsky, dans laquelle on fait avancer un bateau est jetant des pierres vers l'arrière.

La conservation de la quantité de mouvement explique le phénomène de « recul », par exemple d'une arme à feu : lors de l'éjection d'une balle, le fusil recule. Pour le système constitué du fusil de masse  $M$  et de la balle de masse  $m$ , initialement au repos, la quantité de mouvement est nulle :  $\vec{p}_{\text{ini}} = \vec{0}$ . Lors de l'éjection de la balle,

FIGURE 1 – Expérience de Tsiolkovsky

1. Un système est isolé s'il n'est soumis à aucune force, et pseudo-isolé s'il est soumis à une résultante nulle des forces extérieures.

celle-ci part avec une vitesse  $\vec{v}$ ; la quantité de mouvement du système après éjection s'écrit :  $\vec{p} = m\vec{v} + M\vec{V}$ . Or la quantité de mouvement se conserve, donc :

$$\vec{p} = \vec{p}_{\text{ini}} \Rightarrow m\vec{v} + M\vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}$$

c'est-à-dire que le fusil est animé d'une vitesse de même direction et de sens opposé à celle de la balle. Le fusil standard de l'armée française jusqu'en 1996, le FA-MAS, était une arme d'environ 4,4 kg qui tirait des munitions pesant environ 4 g avec une vitesse d'éjection de  $900 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . La vitesse de recul de cette arme est :  $4/4400 \times 900 = 0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , ce qui n'est pas négligeable : si le fusil n'est pas fermement calé contre l'épaule, le recul est douloureux ! En calant le fusil contre l'épaule, c'est-à-dire en solidarissant le fusil et le corps, la masse  $M$  à considérer inclut au moins une partie de la masse du corps, et est donc beaucoup plus grande, ce qui diminue la vitesse de recul.

La conservation de la quantité de mouvement est observée lors d'un choc entre particules pseudo-isolées, par exemple deux particules élémentaires dans un accélérateur<sup>2</sup> ou deux boules de billard (approximativement).

FIGURE 2 – Simulation du choc entre deux particules.

Soit deux systèmes pseudo-isolés de masse  $m_1$  et  $m_2$ , animés de vitesses  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ , qui entrent en collision. Leurs vitesses après le choc sont  $\vec{v}'_1$  et  $\vec{v}'_2$  et leurs masses sont  $m'_1$  et  $m'_2$ .

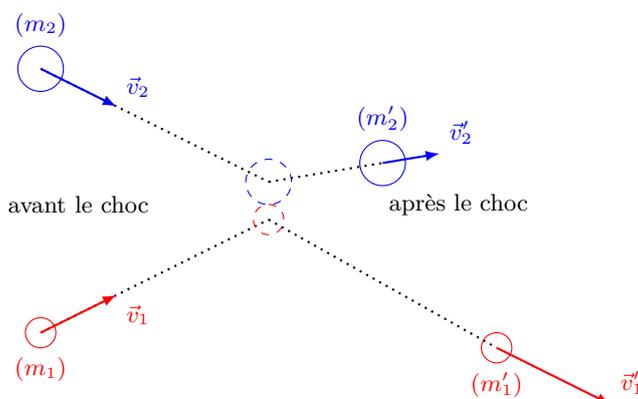


FIGURE 3 – Grandeurs caractéristiques lors d'un choc entre deux particules.

2. L'impulsion est une grandeur fondamentale en physique des particules ou en relativité, deux domaines dans lesquels la masse ne se conserve pas. L'analyse de la quantité de mouvement est une des bases de l'expérimentation en physique des particules : elle permet de déterminer certaines caractéristiques de particules créées lors de chocs entre particules incidentes. C'est en constatant que la conservation de la quantité de mouvement semblait ne pas être respectée lors des désintégrations radioactives  $\beta^-$  que PAULI a émis l'hypothèse de l'existence des neutrinos.

La conservation de l'impulsion du système total permet d'écrire une relation tout à fait générale<sup>3</sup> :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m'_1 \vec{v}'_1 + m'_2 \vec{v}'_2$$

## 2 Principe fondamental de la dynamique

### 2.1 Variation de la vitesse d'un solide

Considérons un mobile de masse  $m$  qui avance selon un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{v}$ .

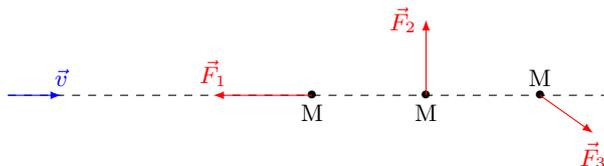


FIGURE 4 – Influence d'une force sur le mouvement.

L'application d'une force sur le point M modifie sa vitesse. On comprend intuitivement que :

- la force  $\vec{F}_1$  change la norme (et éventuellement le sens) de la vitesse mais pas sa direction,
- la force  $\vec{F}_2$  change la direction de la vitesse (mais ne modifie pas sa norme),
- la force  $\vec{F}_3$  change la direction et la norme de la vitesse.

En d'autres termes, une action mécanique entraîne la modification du vecteur vitesse d'un mobile, c'est-à-dire influe sur l'accélération du mobile. En réalité, ceci n'est vrai que pour un système de masse constante ; en toute généralité, les forces modifient la quantité de mouvement du système.

### 2.2 Deuxième loi de Newton

Soit un objet ponctuel de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$ . Dans le cas où sa **masse est constante**, la variation temporelle de sa quantité de mouvement est :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$$

Supposons que l'objet précédent soit soumis à un ensemble de forces extérieures dont la résultante est  $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ . Le **principe fondamental de la dynamique** (ou deuxième loi de Newton) postule que<sup>4</sup> :

dans un référentiel galiléen, la variation temporelle de la quantité de mouvement d'un solide ponctuel est égale à la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées. Pour un système de masse constante :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \Rightarrow m \vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad (2)$$

3. Notons que cette unique relation ne permet pas de déterminer les masses et les vitesses des deux particules après le choc. L'identification des particules permet de connaître les masses  $m'_1$  et  $m'_2$ , mais il reste deux inconnues  $v'_1$  et  $v'_2$ . Le problème ne peut être résolu qu'avec une seconde relation entre les vitesses, qui est issue de la conservation de l'énergie. Le problème des chocs est *a priori* hors programme en BCPST.

4. L'énoncé du principe fondamental de la dynamique au programme de BCPST concerne l'étude des mouvements exclusivement dans un référentiel galiléen. Dans un référentiel non galiléen, il faut ajouter aux forces extérieures deux autres forces, dites d'inertie : la force d'entraînement et la force de Coriolis. On a déjà évoqué ce problème des référentiels lors de l'énoncé du principe d'inertie au chapitre précédent.

On peut montrer que, pour un solide non ponctuel indéformable, de masse totale constante  $m$  et de centre de masse  $G$ , dans un référentiel galiléen, le **théorème du centre d'inertie** s'applique :

$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad (3)$$

Ce théorème est toujours valable. Dans le cas où aucun mouvement de rotation du système n'intervient, le théorème du centre d'inertie revient à dire que tout se passe comme si la masse totale du solide était concentrée en un point unique, le centre d'inertie<sup>5</sup>.

## 2.3 Principe d'inertie

Si la somme des forces appliquées est nulle  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$  (système mécaniquement isolé ou pseudo-isolé), alors l'accélération est nulle :  $d\vec{v}/dt = 0$  et par voie de conséquence la vitesse est constante  $\vec{v} = \vec{c}_t$  ce qui signifie que le mouvement est rectiligne et uniforme. On retrouve ainsi le principe d'inertie.

Expérimentalement, ceci est vérifié à plusieurs échelles : les objets en mouvement dans l'espace loin de tout astre (donc quasi isolés) sont en translation rectiligne uniforme (échelle astronomique), de même que les objets pseudo-isolés comme un palet lancé sur la glace ou sur une table à coussin d'air.

Inversement, si la somme des forces extérieures n'est pas nulle  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} \neq \vec{0}$ , alors :  $\vec{v} \neq \vec{c}_t$ , c'est-à-dire que le vecteur vitesse évolue au cours du temps. Cette évolution peut concerner la norme (la valeur de la vitesse change), la direction (la direction du mouvement change), ou les deux.

## 3 Exemples d'application

### 3.1 Principe de la résolution des exercices

La résolution de la plupart des exercices de mécanique se fait en 3 étapes, le tout accompagné d'un schéma clair.

Première étape : le cadre d'étude.

- Définir le système d'étude.
- Choisir un référentiel adapté au problème ; en BCPST, il sera toujours possible de choisir un référentiel galiléen.
- Définir un repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  respectant la symétrie du problème et permettant de simplifier au maximum les équations (axe le long de la direction du mouvement s'il est rectiligne, axes colinéaires au plus grand nombre de forces possibles, etc).
- Définir la date initiale.

Deuxième étape : étude cinématique.

- Exprimer le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  dans le repère choisi, en tenant compte des contraintes du mouvement (mouvement plan, mouvement rectiligne).
- En déduire les expressions des vecteurs vitesse et accélération.

Troisième étape : étude dynamique.

- Faire l'inventaire des forces extérieures qui s'appliquent au système.
- Écrire le principe fondamental de la dynamique et projeter sur les trois vecteurs du repère.
- Extraire des trois relations obtenues l'information cherchée : expression d'une force, vitesse au cours du temps par une première intégration, position au cours du temps par une seconde intégration, etc.

Notons que, dans le cas des mouvements tels que la position ne dépend que d'une seule variable, comme les mouvements rectilignes, la vitesse est obtenue bien plus facilement en appliquant des théorèmes énergétiques (théorème de l'énergie cinétique ou de l'énergie mécanique) qui seront vus en seconde année.

---

5. Aucun mouvement de rotation n'est au programme en BCPST. En conséquence, le théorème du centre d'inertie se confond avec le principe fondamental de la dynamique. L'étude des mouvements de rotation nécessite l'introduction d'une grandeur supplémentaire, le moment cinétique, dont la variation temporelle est liée à la somme des moments des forces appliquées. Le concept de moment de force sera introduit en seconde année.

### 3.2 Exemple 1 : arrêt d'une particule chargée

On considère une chambre de longueur totale  $L$ , dans laquelle règne un vide suffisamment poussé pour pouvoir négliger tout phénomène de frottement, et où règne un champ électrique uniforme  $\vec{E}$ . Par une petite ouverture, on fait entrer une particule chargée de masse  $m$  et de charge  $q$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  colinéaire au champ électrique. On souhaite déterminer quelle doit être l'intensité du champ électrique pour que la particule soit arrêtée avant d'arriver à l'autre bout de la chambre. La masse de la particule est telle qu'on pourra négliger le poids.

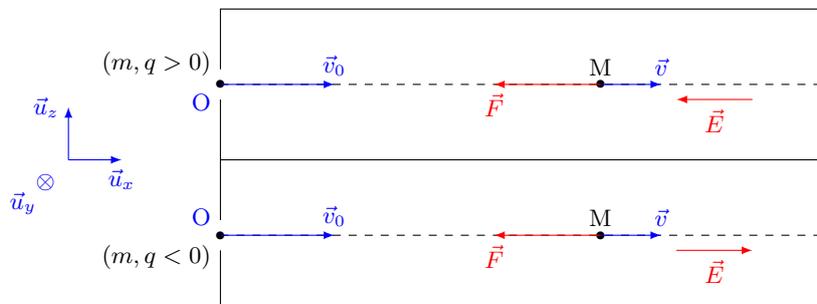


FIGURE 5 – Freinage d'une particule chargée par un champ électrique.

Commençons par remarquer qu'il faut distinguer deux cas, selon que la particule est chargée positivement ou négativement. Sachant qu'on veut freiner la particule, il faut que la force électrique  $\vec{F} = q\vec{E}$  soit orientée en sens contraire de la vitesse initiale. Par conséquent :

- si  $q > 0$ , le champ  $\vec{E}$  doit être en sens contraire de  $\vec{v}_0$ ,
- si  $q < 0$ , le champ  $\vec{E}$  doit être dans le même sens que  $\vec{v}_0$ .

Énonçons les conditions d'étude du problème.

- Système : la particule de charge  $q$  et de masse  $m$ .
- Référentiel : terrestre local, galiléen pour ce mouvement de courte durée.
- Repère :  $(O, \vec{u}_x)$ , avec  $O$  le point d'entrée de la particule dans la chambre et  $\vec{u}_x$  colinéaire à  $\vec{v}_0$ .
- Date initiale : entrée de la particule dans la zone de champ électrique.

La force électrique est colinéaire à  $\vec{u}_x$  et la vitesse initiale aussi. À l'entrée dans la chambre, la seule force qui s'applique est colinéaire à la vitesse, et ne va donc pas modifier la direction de celle-ci. On en déduit que le mouvement est rectiligne selon  $(O, \vec{u}_x)$ . Par conséquent :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

Comme on néglige le poids et les frottements, la seule force est la force électrique. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E}$$

Si  $q > 0$ , on a :  $q\vec{E} = q \times (-E\vec{u}_x) = -qE\vec{u}_x$ . Si  $q < 0$ , alors :  $q\vec{E} = q \times (E\vec{u}_x) = qE\vec{u}_x$ . Les deux cas sont modélisables par une unique formule :  $q\vec{E} = -|q|E\vec{u}_x$ . Projétons le principe fondamental de la dynamique sur le repère :

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = -|q|E \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On cherche à arrêter la particule avant qu'elle n'atteigne le bout de la chambre, autrement dit, on veut que sa vitesse devienne nulle avant que son abscisse ne soit égale à  $L$ . Il faut donc relier une information sur la vitesse à une information sur la position, ce qui nécessite d'établir les expressions de la vitesse et de la position. Intégrons une première fois, en définissant l'instant  $t = 0$  au moment de l'entrée de la particule dans la chambre (passage de la particule en  $O$ ) :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{|q|E}{m} \Rightarrow v_x = -\frac{|q|E}{m} \times t + k$$

avec  $k = v_0$  puisqu'à  $t = 0$ ,  $v_x(t=0) = v_0$ . Intégrons une seconde fois pour obtenir la position, sachant qu'à  $t = 0$ ,  $x(t=0) = 0$  :

$$v_x = v_0 - \frac{|q|E}{m} \times t = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = v_0 t - \frac{|q|E}{2m} \times t^2$$

L'arrêt de la particule a lieu à la date  $t_a$  telle que :

$$v_0 - \frac{|q|E}{m} \times t_a = 0 \Rightarrow t_a = \frac{mv_0}{|q|E}$$

Reportons dans l'expression de la position pour trouver celle  $x_a$  qui correspond au point d'arrêt :

$$x_a = v_0 t_a - \frac{|q|E}{2m} \times t_a^2 = t_a \left( v_0 - \frac{|q|E}{2m} \times t_a \right) = \frac{mv_0}{|q|E} \left( v_0 - \frac{|q|E}{2m} \times \frac{mv_0}{|q|E} \right) = \frac{mv_0^2}{2|q|E}$$

On cherche la condition sur  $E$  pour que le point d'arrêt soit à une abscisse inférieure à  $L$ , soit :

$$x_a < L \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2|q|E} < L \Rightarrow E > \frac{mv_0^2}{2|q|L}$$

On peut vérifier la cohérence de cette expression en analysant l'influence des différents paramètres. Le champ (donc la force électrique) doit être d'autant plus fort que :

- la vitesse initiale est élevée (il est plus difficile d'arrêter une particule rapide qu'une particule lente),
- la masse est grande (il est plus difficile d'arrêter une particule rapide qu'une particule lente) ;

et le champ nécessaire est d'autant plus faible que :

- la charge est grande (plus la particule est chargée, plus la force électrique est intense),
- la longueur de la chambre est grande (plus la chambre est grande, moins il est nécessaire de freiner fort).

### 3.3 Exemple 2 : glissement d'un pavé

On considère un pavé de masse  $m$ , lâché d'une altitude  $H$  sans vitesse initiale en haut d'un pan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. On admet la loi de Coulomb : les composantes normale et tangentielle de la force de frottement sont proportionnelles :  $\|\vec{R}_T\| = f \times \|\vec{R}_N\|$ . On cherche à déterminer la date à laquelle le pavé arrive en bas du pan incliné et la vitesse atteinte.

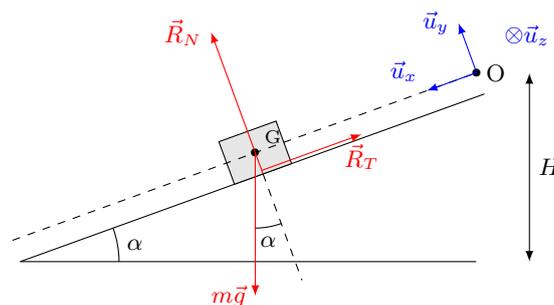


FIGURE 6 – Chute d'un pavé sur un pan incliné.

Énonçons les conditions d'étude du problème.

- Système : le pavé de masse  $m$ .
- Référentiel : terrestre local, galiléen pour ce mouvement de courte durée.
- Répère :  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ , avec  $O$  la position initiale du centre de gravité du pavé,  $\vec{u}_x$  selon la direction du pan incliné et  $\vec{u}_y$  perpendiculaire au pan incliné.
- Date initiale : démarrage du mouvement.

Commençons par noter que le pavé va suivre le pan incliné ; il n'a donc aucun mouvement selon  $\vec{u}_y$ . En outre, toutes les forces sont dans le plan vertical, et la vitesse initiale est nulle ; en conséquence, rien ne se passe selon  $\vec{u}_z$ . Le mouvement est rectiligne selon la ligne de plus grande pente. Les vecteurs position, vitesse et accélération sont donc de la forme :

$$\vec{OM} = \begin{cases} x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

Le pavé est soumis à son poids et à la réaction du support. Écrivons le principe fondamental de la dynamique et projetons suivant les trois axes :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_T + \vec{R}_N \Rightarrow \begin{cases} ma_x = -R_T + mg \sin \alpha \\ 0 = R_N - mg \cos \alpha \\ 0 = 0 + 0 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on tire  $R_N = mg \cos \alpha$ . D'après la loi de Coulomb, on a alors :  $R_T = fmg \cos \alpha$ . En injectant dans la première équation, on obtient l'expression de l'accélération, d'où on tire la vitesse par intégration :

$$ma_x = mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \Rightarrow v_x = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + v_{x0}$$

La vitesse initiale étant nulle,  $v_x(t=0) = 0$ , soit  $v_{x0} = 0$ . En intégrant une seconde fois, on obtient la position :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t \Rightarrow x = \frac{1}{2}g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t^2 + x_0$$

Comme on a placé l'origine du repère à la position d'origine du pavé,  $x(t=0) = 0$ , soit  $x_0 = 0$ . En définitive, la position est :

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t^2$$

En bas du pan incliné, l'abscisse est  $L = H/\sin \alpha$ . Cette abscisse est atteinte à la date  $t_1$  telle que :

$$\frac{H}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g \sin \alpha \times (\sin \alpha - f \cos \alpha)}}$$

Pour avoir la vitesse atteinte en bas du pan incliné, il suffit de reporter cette date dans l'expression de la vitesse :

$$v_{(t_1)} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \times \sqrt{\frac{2H}{g \sin \alpha \times (\sin \alpha - f \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{2Hg \times (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{\sin \alpha}} = \sqrt{2Hg \times \left(1 - \frac{f}{\tan \alpha}\right)}$$

### 3.4 Exemple 3 : tir d'un projectile

On considère un projectile de masse  $m$ , assimilable à un objet ponctuel, lancé à partir du sol avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec le sol, supposé horizontal. On se trouve dans le champ de pesanteur terrestre, et on néglige les frottements dus à l'air.

On souhaite déterminer :

- l'équation de la trajectoire,
- la flèche, c'est-à-dire le point le plus haut atteint par le projectile,
- la portée du tir, c'est-à-dire la distance séparant le point de lancement du point d'impact, en supposant le sol horizontal.

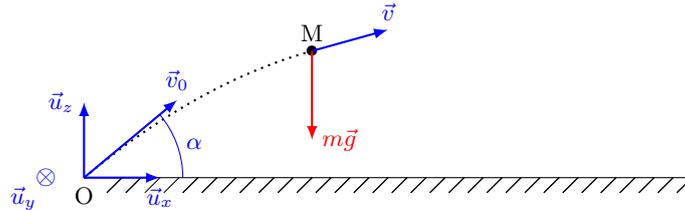


FIGURE 7 – Tir d'un projectile dans le champ de pesanteur.

Posons les conditions d'étude du problème.

- Système : le projectile de masse  $m$ .
- Référentiel : terrestre local, galiléen pour ce mouvement de courte durée.
- Répère :  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ , avec  $O$  la position initiale du centre de gravité du projectile,  $\vec{u}_x$  selon la direction horizontale et  $\vec{u}_z$  selon la verticale, de sorte que  $\vec{v}_0$  soit dans le plan  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ .
- Date initiale : démarrage du mouvement.

Prenons la peine de justifier le choix du repère. Le plan horizontal (celui du sol) va sans doute jouer un rôle particulier, puisque c'est de là qu'est tiré le projectile, et c'est là qu'il arrive. En outre, le vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0$  est inclus dans un plan vertical. Il est judicieux de choisir les vecteurs de base de sorte à faire apparaître ces plans. On choisit donc par exemple  $\vec{u}_x$  dans le plan horizontal et  $\vec{u}_z$  selon la verticale, de sorte que  $\vec{v}_0$  soit dans le plan  $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$ . La vitesse initiale est alors de la forme :

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{x0} = v_0 \cos \alpha \\ v_{z0} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Le mouvement du projectile est dû à son poids et à la vitesse initiale, tous les deux dans le plan vertical  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ , qui constitue donc le plan du mouvement. Il n'y a donc aucun mouvement selon  $\vec{u}_y$ , qu'on ne considèrera pas dans toute la suite. Les vecteurs position, vitesse et accélération sont ainsi de la forme :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix}$$

Si on néglige les frottements fluides dus à l'air, la seule force appliquée est le poids. Écrivons le principe fondamental de la dynamique et projetons sur les vecteurs de base :

$$m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \begin{cases} a_x = dv_x / dt = 0 \\ a_z = dv_z / dt = -g \end{cases}$$

On en déduit l'expression du vecteur vitesse en primitivant une première fois, et en déterminant les deux constantes d'intégration en utilisant l'expression de la vitesse initiale ( $\vec{v}_0$  à  $t = 0$ ) :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \lambda_1 \\ v_z = -gt + \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_z = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Une seconde primitivation, en utilisant la condition initiale sur la position (coordonnées  $(0, 0)$  à  $t = 0$ ), conduit au système d'équations paramétriques :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t + \mu_1 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + \mu_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

L'équation cartésienne s'obtient en éliminant le temps entre les deux équations, ce qui se fait en exprimant  $t$  en fonction de  $x$  et en reportant dans l'expression de  $z$  :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow z = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

On reconnaît l'équation d'une parabole concave d'axe vertical ; le mouvement est donc parabolique. La trajectoire est représentée ci-dessous.

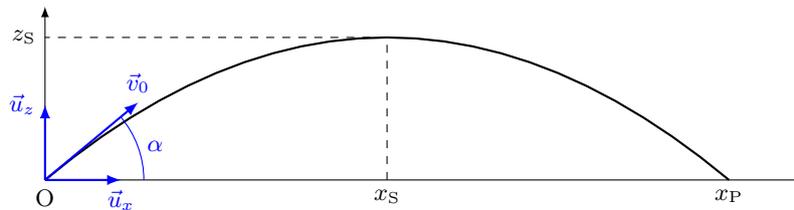


FIGURE 8 – Trajectoire du tir d'une projectile sans frottement.

Remarquons qu'il est possible d'intégrer directement en vecteur. Séparons les variables dans l'expression de l'accélération, et intégrons la relation vectorielle entre l'instant initial, pour lequel la vitesse est  $\vec{v}_0$ , et un instant quelconque, pour lequel elle vaut  $\vec{v}$ . Sachant que  $\vec{g}$  est un vecteur constant, on a :

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \vec{g} dt = \vec{g} \int_0^t dt \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{g}t \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

Intégrons une deuxième fois pour obtenir le vecteur position en fonction du temps, sachant qu'il est nul à l'instant initial. Les vecteurs  $\vec{v}_0$  et  $\vec{g}$  étant constant, on a :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \Rightarrow \int_{\vec{0}}^{\overrightarrow{OM}} d\overrightarrow{OM} = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{g}t) dt = \vec{v}_0 \int_0^t dt + \vec{g} \int_0^t t dt \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

En projetant sur les axes du repère, on retrouve le système d'équations paramétriques<sup>6</sup>.

Dans la première partie de la trajectoire, le projectile monte, c'est-à-dire que la composante verticale de la vitesse est positive :  $v_z > 0$ . Après le sommet de la trajectoire, le projectile descend, ce qui correspond à  $v_z < 0$ . Comme la vitesse est continue, on en déduit que le sommet de la trajectoire est atteint à la date  $t_S$  telle que :

$$v_z = 0 \Rightarrow v_0 \sin \alpha - gt_S = 0 \Rightarrow t_S = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

6. Cette méthode très rapide est réservée aux personnes très à l'aise en mécanique.

En reportant dans le système d'équations paramétriques, on obtient les coordonnées du sommet de la trajectoire, qui sont celles du point le plus élevé atteint par le projectile :

$$\begin{cases} x_S = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \\ z_S = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{cases}$$

Pour un projectile donné, comment faut-il le tirer pour l'envoyer le plus haut possible ? Il est évident que  $z_S$  est maximal si  $\sin \alpha$  est maximal, soit  $\alpha = \pi/2$ . C'est donc avec un tir vertical qu'on atteint l'altitude la plus élevée.

La **portée** du tir correspond à la distance entre le lieu du tir et le lieu où le projectile atteint le sol. Cette position correspond à  $z = 0$ . En utilisant l'équation cartésienne de la trajectoire, évaluons l'abscisse de ce point :

$$z = 0 \Rightarrow x \left( \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) = 0$$

La première solution est  $x = 0$ , correspond au lieu du tir. La deuxième solution correspond à l'abscisse  $x_P$  du lieu où le projectile retombe, qui est aussi la distance  $L$  parcourue selon l'axe horizontal (car  $x_0 = 0$ ) :

$$\tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_P = 0 \Rightarrow x_P = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = L$$

La portée du tir vérifie donc  $x_P = 2x_S$ , ce qui est attendu par symétrie du problème. La portée est maximale si  $x_P$  est maximal, soit si  $\sin 2\alpha$  est maximal. Ceci correspond à  $2\alpha = \pi/2$  soit  $\alpha = \pi/4$ . La portée est maximale si on effectue un tir à  $45^\circ$ . Notons que c'est un résultat intuitif : même les jeunes enfants ont tendance à tirer à  $45^\circ$  pour tirer le plus loin<sup>7</sup>

## 3.5 Exemple 4 : chute d'une goutte de pluie

### 3.5.1 Mise en équation et résolution analytique

On considère une goutte d'eau (masse volumique  $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) sphérique de rayon  $R = 0,10 \text{ mm}$ , qui tombe d'un nuage à l'altitude  $H = 2000 \text{ m}$  sans vitesse initiale. Durant son mouvement de chute, elle est soumise à une force de frottement fluide donnée par la loi de Stokes :  $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$ , où  $\vec{v}$  est sa vitesse et  $\eta = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  la viscosité de l'air. On néglige la poussée d'Archimède due à l'air.

On veut d'une part montrer qualitativement que la goutte atteint nécessairement une vitesse limite. D'autre part, on veut établir la loi d'évolution de la vitesse et évaluer la durée de la chute jusqu'au sol.

On peut commencer par une analyse qualitative du problème. Lors de sa chute sous l'effet de son poids, la vitesse de la goutte augmente, et par voie de conséquence, l'intensité de la force de frottement augmente.

Il y a donc deux forces, dont l'une vers le bas (le poids, qui tend à faire augmenter la vitesse) est constante, et l'autre vers le haut (la force de frottement qui tend à faire diminuer la vitesse) augmente. Il arrive nécessairement un instant où la vitesse est telle que la force de frottement est d'intensité égale au poids. Les deux forces se compensent alors et la vitesse se stabilise.

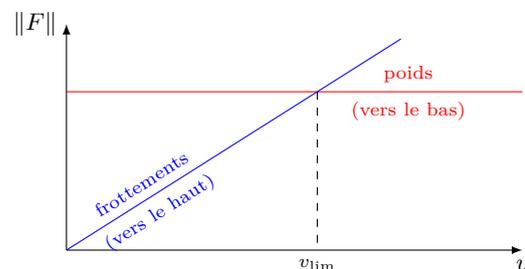


FIGURE 9 – Évolution des forces avec la vitesse.

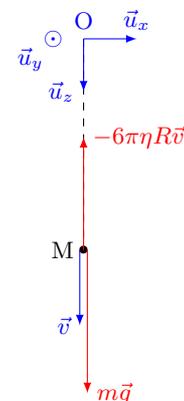
Il faut maintenant mettre cela en forme. Énonçons les conditions d'étude du problème.

7. C'est un résultat manifeste de l'évolution ! Ceux qui tiraient à un autre angle devaient se rapprocher davantage du mammoth, et ont par conséquent eu une descendance moins nombreuse !

- Système : la goutte d'eau de masse  $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$ .
- Référentiel : terrestre local, galiléen pour ce mouvement de courte durée.
- Répère :  $(O, \vec{u}_z)$ , avec O le point de départ de la goutte et  $\vec{u}_z$  vertical vers le bas.
- Date initiale : début de la chute.

Le poids est colinéaire à  $\vec{u}_z$  et la vitesse initiale est nulle donc la goutte démarre sous l'unique effet du poids, donc dans une direction verticale. La seule autre force qui s'applique étant colinéaire à la vitesse, elle a une direction verticale dès que le mouvement commence. Autrement dit, au tout début du mouvement, les deux seules forces sont verticales; on en déduit que le mouvement est rectiligne selon  $(O, \vec{u}_z)$ . Par conséquent :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v_z = v \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ \frac{dv}{dt} = a_z \end{cases}$$



avec  $v_z = v$  puisque l'axe vertical est orienté dans le sens de parcours de la goutte<sup>8</sup>. Écrivons le principe fondamental de la dynamique appliqué à goutte, soumise à son poids  $m\vec{g}$  et à la force de frottement  $-6\pi\eta R\vec{v}$ , et projetons sur les trois axes :

FIGURE 10 – Chute d'une goutte.

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 + 0 \\ 0 = 0 + 0 \\ m \frac{dv}{dt} = mg - 6\pi\eta Rv \end{cases}$$

La norme de la vitesse vérifie donc l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta R}{m}v = g \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constant. On voit apparaître la constante de temps du phénomène :

$$\tau = \frac{m}{6\pi\eta R} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0}{6\pi\eta R} = \frac{2R^2 \rho_0}{9\eta}$$

Un tel mouvement comporte un régime transitoire suivi d'un régime permanent. Le second membre étant constant, le régime permanent correspond à une vitesse constante, soit  $dv/dt = 0$ . La vitesse en régime permanent vérifie :

$$\frac{v_{\text{lim}}}{\tau} = g \Rightarrow v_{\text{lim}} = \tau g$$

Faisons l'application numérique :  $\tau = 0,11$  s. On sait qu'on arrive en régime permanent au bout d'environ  $5\tau \approx 0,55$  s. Cette durée est très courte, et on peut faire l'hypothèse que le régime permanent est atteint presque immédiatement, autrement dit que la vitesse de la goutte atteint  $\vec{v}_{\text{lim}}$  quasiment instantanément. On peut alors faire l'approximation d'une chute à vitesse constante  $v_{\text{lim}} = \tau \times g \approx 1,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . La durée d'une chute de  $h = 2000$  m est alors de l'ordre de :

$$t = \frac{h}{v_{\text{lim}}} = 1835 \text{ s} \approx 30 \text{ min } 35 \text{ s}$$

8. Si l'axe vertical est vers le haut, alors on aurait ici  $v_z - v$ . Il ne faut pas confondre la norme du vecteur vitesse  $v$  qui est toujours positive, avec la composante du vecteur vitesse selon un des axes, qui peut être positive ou négative.

La durée de la chute est très longue par rapport au temps nécessaire pour arriver en régime permanent, ce qui justifie l'hypothèse d'une chute faite quasi-intégralement à la vitesse limite. Du fait que la vitesse soit constante durant quasiment toute la chute évite d'avoir à déterminer explicitement l'expression de la position.

On remarque qu'il n'est pas nécessaire de faire la résolution complète de l'équation différentielle. Cependant, cette résolution est tout-à-fait possible. La solution particulière est  $v_{\text{lim}}$ , et la solution de l'équation homogène est de la forme  $Ae^{-t/\tau}$ . La solution complète est donc :  $v = Ae^{-t/\tau} + v_{\text{lim}}$ . La constante  $A$  se trouve grâce à une condition à la limite : à  $t = 0$ , la goutte démarre avec une vitesse nulle, soit  $0 = Ae^0 + v_{\text{lim}}$ . La vitesse suit donc la loi :  $v(t) = v_{\text{lim}}(1 - e^{-t/\tau})$ .

Comme dans le cas du tir du projectile, on peut aussi effectuer une résolution purement vectorielle à partir du principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta R}{m}\vec{v} = \vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants dont la variable est le vecteur  $\vec{v}$ . La vitesse en régime permanent correspond à  $d\vec{v}/dt = 0$ , soit :

$$\frac{\vec{v}_{\text{lim}}}{\tau} = \vec{g} \Rightarrow \vec{v}_{\text{lim}} = \tau\vec{g}$$

ce qui permet d'avoir l'expression de la vitesse sans projeter.

### 3.5.2 Résolution numérique par la méthode d'Euler

La méthode d'Euler permet de résoudre numériquement d'une équation différentielle du premier ordre. Cette méthode consiste à faire une résolution de proche en proche, avec un pas déterminé.

La méthode d'Euler a pour principal et considérable avantage sa simplicité de mise en équation et de programmation. Son inconvénient principal est son manque de précision si le pas choisi est trop grand par rapport à la durée du phénomène.

Dans le cas de l'équation différentielle :  $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g$ , dont la variable est le temps, le pas est temporel : on choisit  $\Delta t$  qui sépare deux dates consécutives auxquelles on calcule la vitesse. Si le pas  $\Delta t$  est suffisamment petit, la dérivée à la date  $t_j$  est assimilable au taux de variation à cette date

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_j = \frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta t} \Rightarrow v_{j+1} = v_j + \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_j} \times \Delta t$$

D'autre part, la dérivée à la date  $t_j$  est donnée par l'équation différentielle :

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_j = -\frac{v_j}{\tau} + g$$

En conséquence :

$$v_{j+1} = v_j + \left(-\frac{v_j}{\tau} + g\right) \times \Delta t$$

L'altitude atteinte à la date  $t_{j+1}$  se déduit de l'altitude à la date  $t_j$  en supposant qu'entre ces deux dates la vitesse est constante égale à  $v_j$ , soit, en n'oubliant pas que l'altitude diminue (elle correspond à un axe  $\vec{u}_z$  orienté vers le haut) :

$$z_{j+1} = z_j - v_j \times \Delta t$$

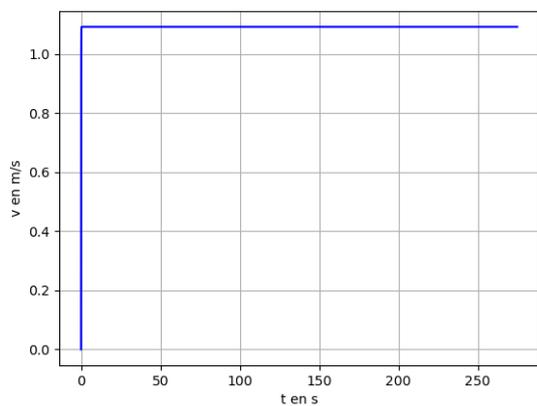
Il suffit de préciser la condition initiale :  $t_0$  et  $v_0$  et de choisir un pas  $\Delta t$ , et on calcule successivement les valeurs de  $v$  aux dates  $t_0 + j\Delta t$ . Le programme pour la chute de la goutte est donné ci-dessous. Les valeurs des dates successives, des vitesses et des altitudes sont stockées dans trois listes initialisées avec les conditions initiales. Une boucle calcule les valeurs successives :

- des dates en ajoutant  $\Delta t$  à la date précédente,
- des vitesses en utilisant l'expression ci-dessus de  $v_{j+1}$  en fonction de  $v_j$ ,
- des altitudes en utilisant l'expression ci-dessus de  $z_{j+1}$  en fonction de  $z_j$ .

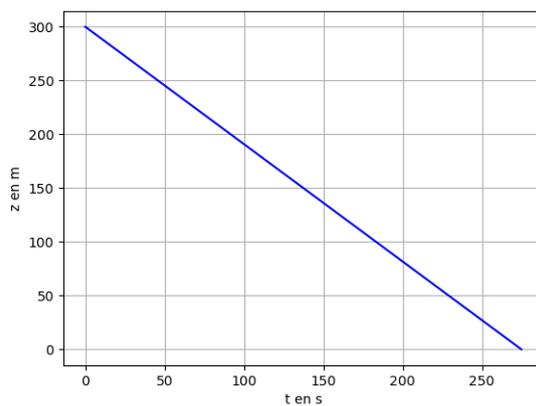
jusqu'à ce que l'altitude devienne nulle. Notons qu'ici on ne peut pas faire une boucle for, dans la mesure où on ne sait pas combien de temps dure la chute puisqu'on ne connaît pas encore la vitesse. Le programme permet de comparer le cas avec frottement avec un cas sans frottement, pour lequel il suffit de prendre  $\eta = 0$ .

```
1 """Importation des bibliothèques """
2
3 from math import *
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 """Entree des donnees """
7
8 H = 300      # en m
9 g = 9.8
10 m = 4.2E-9  # en kg
11 R = 1E-4    # en m
12 eta = 2E-5  # prendre eta = 0 pour avoir le cas sans frottement
13 alpha = 6*pi*eta*R
14
15 """Initialisation """
16
17 t = [0]      # liste des dates
18 v = [0]      # liste des vitesses
19 z = [H]      # liste des altitudes
20
21 Dt = 0.1     # pas temporel en s
22 j = 0        # indice d'incrementation
23
24 """Calcul des valeurs successives de la vitesse et de l'altitude """
25
26 while z[j] > 0 :    # le calcul se fait tant que la goutte est au-dessus du sol
27     T = t[j]+Dt    # incrementation de la date
28     V = v[j]+Dt*(-alpha*v[j]/m+g)  # calcul de la vitesse à j+1
29     Z = z[j]-v[j]*Dt    # calcul de l'altitude à j+1
30     t.append(T)
31     v.append(V)
32     z.append(Z)
33     j = j+1
34
35 """Trace des courbes """
36
37 plt.plot(t,v,'b-')
38 plt.xlabel('t en s')
39 plt.ylabel('v en m/s')
40 plt.grid()
41 plt.show()
```

Les courbes obtenues sont données ci-dessous. La courbe de vitesse montre que celle-ci atteint presque instantanément sa valeur limite, et par conséquent que la quasi-totalité de la chute se fait avec une décroissance affine de l'altitude.



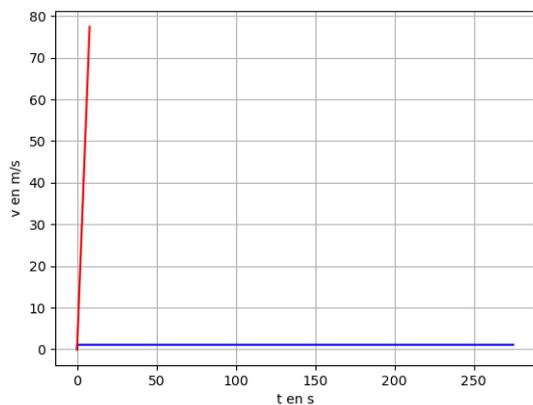
(a) vitesse de chute au cours du temps



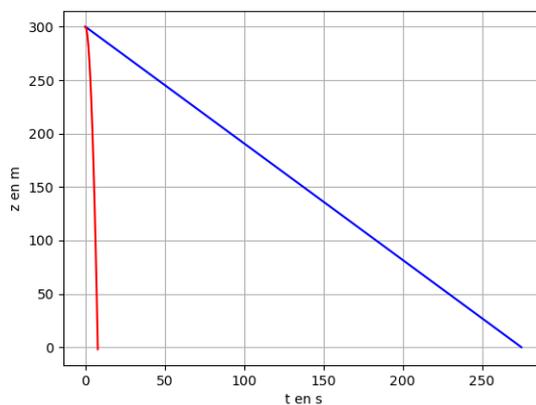
(b) altitude au cours du temps

FIGURE 11 – Vitesse et altitude lors de la chute d’une goutte avec frottement.

On peut comparer les vitesses dans le cas avec (en bleu) et sans (en rouge) frottement ; en l’absence de frottement la vitesse augmente tout au long de la chute, et atteint des valeurs énormes par rapport à la vitesse limite observée. De ce fait, l’altitude chute de plus en plus vite, et la goutte arrive au sol



(a) vitesse de chute au cours du temps



(b) altitude au cours du temps

FIGURE 12 – Vitesse et de l’altitude lors de la chute d’une goutte avec et sans frottement.