17

Intégration d'une fonction continue réelle sur un segment

Dans tout le chapitre, (a, b) est un couple de réels avec $a < b$. On calculera l'intégrale de fonctions continues définies sur un segment $[a, b]$.

17.1 Intégrale

17.1.1 Intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment

Définition 1: Intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive.
On appelle intégrale de la fonction f sur le segment $[a, b]$ l'aire sous la courbe de f, c'est à dire l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe de f, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.
L'intégrale de la fonction f sur le segment $[a, b]$ se note

$$\int_a^b f(t)dt.$$

On définit également $\displaystyle\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.

Remarque 1. • L'élément infinitésimal dt précise par rapport à quelle variable on intègre et est indispensable, notamment pour effectuer des changements de variable. Il ne faut donc jamais l'omettre !

Cela dit, le t est une variable muette et, à l'instar d'une somme, on note indifféremment $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$.

• $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$.

Exemple 1. • Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. une fonction constante égale à $k \in \mathbb{R}_+$. La fonction f est bien continue et positive sur $[a, b]$.

L'aire sous la courbe de f est donc l'aire d'un rectangle de longueur $b - a$ et de largeur k, donc

$$\int_a^b kdt = k(b - a).$$

En notant $F:\begin{array}{ccc}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & kx\end{array}$ une primitive de f sur $[a,b]$, on remarque que

$$\int_a^b k dt = F(b) - F(a).$$

• Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Soit $f:\begin{array}{ccc}[0,a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\end{array}$. La fonction f est bien continue et positive sur $[0,a]$.

L'aire sous la courbe de f est l'aire du triangle dont les sommets sont les points $(0,0),(a,0)$ et (a,a). C'est donc l'aire d'un triangle de base a et de hauteur a donc l'aire vaut $\dfrac{1}{2}a \times a = \dfrac{a^2}{2}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^a t dt = \frac{a^2}{2}$. En notant $F:\begin{array}{ccc}[0,a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{2}\end{array}$ une primitive de f sur $[0,a]$, on remarque que $\displaystyle\int_0^a t dt = F(a) - F(0)$.

• Soit $\begin{array}{ccc} f:[0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{cl} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in]1,2]. \end{array}\right. \end{array}$

La fonction f est continue sur $[0,1]$ et sur $]1,2]$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to 1} 2-x = \lim_{x\to 1} x = 1 = f(1)$ donc f est continue en 1.

Ainsi f est continue sur $[0,2]$.

En outre, pour tout $x \in [0,1], x \geqslant 0$ et pour tout $x \in]1,2], 2-x \geqslant 0$ donc f est bien continue et positive sur $[0,2]$.

L'aire sous la courbe de f entre 0 et 2 est l'aire du triangle dont les sommets sont les points $(0,0),(2,0)$ et $(1,1)$. C'est donc l'aire d'un triangle de base 2 et de hauteur 1, donc l'aire vaut $\dfrac{1}{2}2 \times 1 = 1$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt = 1$.

Proposition 1: Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment

1. (Linéarité) Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives sur $[a, b]$. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^2$,
$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$
2. (Relation de Chasles) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$.
Alors pour tout $c \in [a, b]$,
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$
3. (Positivité) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$.
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.
4. (Croissance) Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives sur $[a, b]$ telles que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$.
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.
5. (Stricte positivité) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Alors
$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b], f(x) = 0.$$

Remarque 2. Le dernier résultat, lié à la positivité de l'intégrale, implique que si f est une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt > 0$.

Démonstration.

1. Découle de la définition de l'intégrale, en remarquant que si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^2$, $\lambda f + \mu g$ est bien une fonction continue et positive sur $[a, b]$.
2. Découle de la définition de l'intégrale.
3. Découle de la définition de l'intégrale.
4. Découle de la définition de l'intégrale.
5. • Si f est identiquement nulle sur $[a, b]$, c'est à dire constante égale à 0, on a
$$\int_a^b f(t)dt = 0 \times (b - a) = 0.$$
• Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$. Montrons que f est identiquement nulle sur $[a, b]$.
Pour cela, supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \neq 0$, i.e. $f(x_0) > 0$ puisque f est positive.
Puisque f est continue en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$,
$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

d'où pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$,

$$f(x) = |f(x)| \geqslant f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| \geqslant \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{x_0-\alpha} f(t)dt + \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)dt + \int_{x_0+\alpha}^b f(t)dt.$$

Par positivité de l'intégrale, puisque f est positive sur $[a, b]$ on a $\displaystyle\int_a^{x_0-\alpha} f(t)dt \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_{x_0+\alpha}^b f(t)dt \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)dt$.

Or, puisque pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{2}$, on a par croissance de l'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)dt \geqslant \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \frac{f(x_0)}{2}dt = \frac{f(x_0)}{2}\times(x_0+\alpha-(x_0-\alpha)) = \frac{f(x_0)}{2}\times 2\alpha = \alpha f(x_0) > 0.$$

On en déduit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt > 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$.

Ainsi, nécessairement pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) = 0$ et puisque f est continue en a et en b on a $f(a) = \displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$ et $f(b) = \displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = 0$, ce qui prouve que f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

$\blacksquare$

17.1.2 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition 2: Parties positive et négative d'une fonction

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I désigne un intervalle réel.
On définit la partie positive de f comme la fonction f^+ définie sur I par

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

On définit de même la partie négative de f comme la fonction f^- définie sur I par

$$f^-(x) = -\min(f(x), 0) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0. \end{cases}$$

Proposition 2: Propriétés des parties positive et négative

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur I. Soient f^+ et f^- les parties positive et négative de f.

1. Pour tout $x \in I$, $f^+(x) \geqslant 0$ et $f^-(x) \geqslant 0$.
2. Pour tout $x \in I$, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.
3. Pour tout $x \in I$, $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.
4. Les fonctions f^+ et f^- sont continues sur I.

Démonstration.

1. Par définition, on a pour tout $x \in I, f^+(x) = \max(f(x), 0) \geqslant 0$.
   De même, pour tout $x \in I, \min(f(x), 0) \leqslant 0$ donc $f^-(x) = -\min(f(x), 0) \geqslant 0$.
2. Soit $x \in I$.
   • Si $f(x) > 0$, alors $f^+(x) - f^-(x) = f(x) - 0 = f(x)$.
   • Si $f(x) \leqslant 0$, alors $f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x)$.
   Ainsi, pour tout $x \in I, f^+(x) - f^-(x) = f(x)$.
3. Soit $x \in I$.
   • Si $f(x) > 0$, alors $f^+(x) + f^-(x) = f(x) + 0 = f(x) = |f(x)|$.
   • Si $f(x) \leqslant 0$, alors $f^+(x) + f^-(x) = 0 + (-f(x)) = -f(x) = |f(x)|$.
   Ainsi, pour tout $x \in I, f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$.
4. D'après les deux alinéas précédents, on a pour tout $x \in I$,
   $$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \quad \text{et} \quad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$
   Puisque la fonction f est continue sur I, la fonction $|f|$ est continue sur I comme composée de fonctions continues.
   Ainsi, f^+ et f^- sont continues sur I comme sommes de fonctions continues sur I.

■

Remarque 3. Pour toute fonction continue f, les fonctions f^+ et f^- sont donc des fonctions continues et positives.

Définition 3: Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Soient f^+ et f^- les parties positive et négative de f.
On définit l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f^+(t)dt - \int_a^b f^-(t)dt.$$

Remarque 4. Comme pour l'intégrale d'une fonction positive, on a $\int_a^a f(t)dt = 0$.

De même, $\int_b^a f(t)dt = \int_b^a f^+(t)dt - \int_b^a f^-(t)dt = -\int_a^b f^+(t)dt + \int_a^b f^-(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.

Remarque 5. La définition est légitime puisque f^+et f^- sont des fonctions continues et positives sur $[a, b]$ donc les intégrales $\int_a^b f^+(t)dt$ et $\int_a^b f^-(t)dt$ ont été définies auparavant. Cela permet donc de définir l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque sur un segment $[a, b]$.

Concrètement, l'intégrale d'une fonction continue se calcule en comptant positivement l'aire sous la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses, et négativement l'aire située entre l'axe des abscisses et la courbe lorsque la fonction est négative.

Exemple 2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Soit $f : \begin{array}{ccc} [-a, a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x. \end{array}$

Pour tout $x \in [-a, a]$, on a $f^+(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{si } x \in [-a, 0] \end{array} \right.$ et $f^-(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in [0, a] \\ -x & \text{si } x \in [-a, 0]. \end{array} \right.$

Par définition, on a $\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^a f^+(t)dt - \int_{-a}^a f^-(t)dt$.

- D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-a}^{a} f^+(t)dt = \int_{-a}^{0} f^+(t)dt + \int_{0}^{a} f^+(t)dt = \int_{-a}^{0} 0dt + \int_{0}^{a} tdt = 0 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

- De même,

$$\int_{-a}^{a} f^-(t)dt = \int_{-a}^{0} f^-(t)dt + \int_{0}^{a} f^-(t)dt = \int_{-a}^{0} -tdt + \int_{0}^{a} 0dt = \int_{-a}^{0} -tdt.$$

Or, cette intégrale est l'aire du triangle dont les sommets sont $(-a,a),(-a,0)$ et $(0,0)$. C'est donc un triangle de base a et de hauteur a donc l'aire vaut $\frac{1}{2}a\times a = \frac{a^2}{2}$. Ainsi, $\int_{-a}^{a} f^-(t)dt = \frac{a^2}{2}$.

Finalement, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{a} f^+(t)dt - \int_{-a}^{a} f^-(t)dt = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$.

Ce résultat n'est pas surprenant puisque la fonction f est impaire, donc l'aire sous la courbe comptée positivement entre 0 et a est égale à celle comptée négativement entre $-a$ et 0, donc elles se compensent.

17.1.3 Propriétés de l'intégrale

Proposition 3: Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

1. (Linéarité) Soient $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$. Alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

2. (Relation de Chasles) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$.
Alors pour tout $c \in [a,b]$,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

3. (Croissance) Soient $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que pour tout $x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x)$.
Alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.
4. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et de signe constant sur $[a,b]$.
Alors

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a,b], f(x) = 0.$$

Démonstration.

1. Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Remarquons déjà que $\lambda f + \mu g$ est bien une fonction continue sur $[a,b]$.
- Supposons dans un premier temps que $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$.
Alors pour tout $t \in [a,b]$,

$$(\lambda f+\mu g)(t) = \lambda(f^+(t)-f^-(t))+\mu(g^+(t)-g^-(t)) = (\lambda f^+(t)+\mu g^+(t))-(\lambda f^-(t)+\mu g^-(t)).$$

Par ailleurs, on a également pour tout $t \in [a,b]$,

$$(\lambda f + \mu g)(t) = (\lambda f + \mu g)^+(t) - (\lambda f + \mu g)^-(t)$$

donc pour tout $t \in [a,b]$,

$$(\lambda f^+(t) + \mu g^+(t)) - (\lambda f^-(t) + \mu g^-(t)) = (\lambda f + \mu g)^+(t) - (\lambda f + \mu g)^-(t)$$

d'où $(\lambda f^+(t) + \mu g^+(t)) + (\lambda f + \mu g)^-(t) = (\lambda f + \mu g)^+(t) + (\lambda f^-(t) + \mu g^-(t))$.
Par linéarité de l'intégrale de fonctions continues et positives sur un segment, on en déduit que

$$\lambda \int_a^b f^+(t)dt + \mu \int_a^b g^+(t)dt + \int_a^b (\lambda f + \mu g)^-(t)dt = \int_a^b (\lambda f + \mu g)^+(t)dt + \lambda \int_a^b f^-(t)dt + \mu \int_a^b g^-(t)dt.$$

Ainsi, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt &= \int_a^b (\lambda f + \mu g)^+(t)dt - \int_a^b (\lambda f + \mu g)^-(t)dt \\
&= \lambda \left(\int_a^b f^+(t)dt - \int_a^b f^-(t)dt \right) + \mu \left(\int_a^b g^+(t)dt - \int_a^b g^-(t)dt \right) \\
&= \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.
\end{aligned}$$

• On considère dorénavant λ et μ de signes quelconques.
Soit $\lambda^+ = \max(0,\lambda)$ et $\lambda^- = -\min(0,\lambda)$. On a $\lambda^+ \geqslant 0, \lambda^- \geqslant 0$ et $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$. De même, $\mu = \mu^+ - \mu^-$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt &= \int_a^b (\lambda^+ f(t) + \lambda^-(-f(t)) + \mu^+ g(t) + \mu^-(-g(t)))dt \\
&= \lambda^+ \int_a^b f(t)dt + \lambda^- \int_a^b -f(t)dt + \mu^+ \int_a^b g(t)dt + \mu^- \int_a^b -g(t)dt.
\end{aligned}$$

Or,

$$0 = \int_a^b 0dt = \int_a^b (f(t) - f(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b -f(t)dt$$

donc $\int_a^b -f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$. De même, $\int_a^b -g(t)dt = -\int_a^b g(t)dt$. Ainsi, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt &= \lambda^+ \int_a^b f(t)dt - \lambda^- \int_a^b f(t)dt + \mu^+ \int_a^b g(t)dt - \mu^- \int_a^b -g(t)dt \\
&= (\lambda^+ - \lambda^-) \int_a^b f(t)dt + (\mu^+ - \mu^-) \int_a^b g(t)dt \\
&= \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt,
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la linéarité.

2. On utilise la relation de Chasles pour les intégrales de fonctions positives et la linéarité montrée ci-dessus : pour tout $c \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt &= \int_a^c (f^+(t) - f^-(t))dt + \int_c^b (f^+(t) - f^-(t))dt \\
&= \int_a^c f^+(t)dt - \int_a^c f^-(t)dt + \int_c^b f^+(t)dt - \int_c^b f^-(t)dt \\
&= \int_a^b f^+(t)dt - \int_a^b f^-(t)dt \\
&= \int_a^b f(t)dt.
\end{aligned}$$

3. Si pour tout $x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x)$ on a pour tout $x \in [a,b], g(x) - f(x) \geqslant 0$ donc d'après la positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b (g(t) - f(t))dt \geqslant 0$.
   Or, par linéarité de l'intégrale, on a
   $$\int_a^b (g(t) - f(t))dt = \int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt \geqslant 0,$$
   d'où $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.
4. On a déjà montré le résultat dans le cas où f est positive sur $[a,b]$. Supposons donc f négative sur $[a,b]$. Ainsi, la fonction $-f$ est continue et positive sur $[a,b]$ et d'après la linéarité et la stricte positivité de l'intégrale, on a
   $$\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow -\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_a^b -f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a,b], -f(x) = 0$$
   ce qui équivaut à dire que f est la fonction nulle sur $[a,b]$.

■

Remarque 6. • On a montré au passage que $\displaystyle\int_a^b -f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.
Ainsi, si $k < 0$, on a $-k > 0$ donc
$$\int_a^b kdt = -\int_a^b -kdt = -(b-a)(-k) = (b-a)k.$$
Finalement, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b kdt = (b-a)k$.

• Si pour tout $x \in [a,b], f(x) \leqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b 0dt = 0$.

Proposition 4: Encadrement de l'intégrale

Soit $f : [a,b]$ une fonction continue.

1. (Inégalité de la moyenne)
   Soient $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $x \in [a,b], m \leqslant f(x) \leqslant M$.
   Alors
   $$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a).$$
2. On a
   $$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$$

Remarque 7. D'après le théorème des bornes atteintes, une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes donc on a toujours
$$(b-a)\min_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant (b-a)\max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Démonstration.

1. Par hypothèse, on a pour tout $x \in [a, b], m \leqslant f(x) \leqslant M$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit
$$\int_a^b m dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b M dt$$
d'où $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$.
2. Pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) \leqslant |f(x)|$ et $-f(x) \leqslant |f(x)|$ d'où pour tout $x \in [a, b]$,
$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|.$$
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b -|f(t)|dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$ i.e.
$$-\int_a^b |f(t)|dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|dt,$$
d'où $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$.

■

Exemple 3. Puisque pour tout $x \in [0, \pi], -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, alors $-\pi \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \cos(t)dt \leqslant \pi$.

17.1.4 Valeur moyenne

Définition 4: Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ avec $a < b$.
On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a, b]$ le nombre réel
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

Remarque 8. C'est la version continue d'une moyenne discrète du type $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Exemple 4. • Si une fonction continue f est d'intégrale nulle sur $[a, b]$, alors sa valeur moyenne est 0. Ceci confirme l'intuition géométrique, à savoir que si l'aire négative en dessous de l'axe des abscisses est égale à l'aire positive au-dessus de l'axe des abscisses, alors la valeur moyenne de la fonction est nulle.

• Soit $k \in \mathbb{R}$. On a $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b k dt = k$ donc la valeur moyenne d'une fonction constante égale à k est k.

• Soit $a \geqslant 0$. Soit $f : \begin{array}{ccc} [0, a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$. On a vu que $\displaystyle\int_0^a f(t)dt = \frac{a^2}{2}$ donc la valeur moyenne de f sur $[0, a]$ est
$$\frac{1}{a-0}\int_0^a f(t)dt = \frac{a}{2}.$$

Théorème 1: Théorème de la valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ appartient à l'image de f, i.e.
$$\exists c \in [a, b], f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration. Puisque f est continue sur le segment $[a,b]$, on a déjà vu que d'après le théorème des bornes atteintes, on a $(b-a)\min_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant (b-a)\max_{x\in[a,b]} f(x)$ d'où

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leqslant \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Soient $(m,M)\in[a,b]^2$ tels que $f(m)=\min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $f(M)=\max_{x\in[a,b]} f(x)$.

Ainsi, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \in [f(m),f(M)]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c entre m et M, a fortiori $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$. ■

17.2 Théorème fondamental de l'analyse

17.2.1 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 2: Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I. Soit $a\in I$.
On considère la fonction F définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.
La fonction F est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a, i.e.

$$\forall x\in I, F'(x)=f(x) \quad \text{et} \quad F(a)=0.$$

Démonstration. • Montrons que F est une primitive de f sur I.

Soit $x_0\in I$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0)=f(x_0)$, i.e. montrons que $\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$.

Soit $x\in I\setminus\{x_0\}$.

D'après la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0) &= \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt-(x-x_0)f(x_0)\right)\\
&= \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)dt+\int_{x_0}^a f(t)dt-\int_{x_0}^x f(x_0)dt\right)\\
&= \frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)dt-\int_{x_0}^x f(x_0)dt\right)\\
&= \frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))dt\right).
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$.

Puisque f est continue en x_0, il existe $\alpha>0$ tel que

$$\forall x\in I\cap[x_0-\alpha,x_0+\alpha], |f(x)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon.$$

On déduit du calcul précédent que pour tout $x \in (I \setminus \{x_0\}) \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| &= \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|x-x_0|}\int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)} |f(t)-f(x_0)|dt \\ &\leqslant \frac{1}{|x-x_0|}\int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)} \varepsilon \\ &\leqslant \frac{1}{|x-x_0|}|x-x_0|\varepsilon \\ &\leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = 0$, i.e. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$.

Ainsi, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$ et ce pour tout $x_0 \in I$, donc F est bien une primitive de f sur I.

- Par définition de $F, F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.
- Enfin, si G est une primitive de f sur I telle que $G(a) = 0$, alors pour tout $x \in I$,

$$(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

donc $G-F$ est constante sur I égale à $(G-F)(a) = G(a) - F(a) = 0$ donc $G = F$, d'où l'unicité de F. ■

Remarque 9. • Ainsi, toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives (une infinité, égales à une constante additive près). Ceci légitime la définition de la fonction logarithme néperien sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{dt}{t}$ comme l'unique primitive de la fonction continue $t \longmapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.

• Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si $a \in I$, alors

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

En effet, la fonction $x \longmapsto f(x) - f(a)$ est l'unique primitive de f' sur I qui s'annule en a.

Plus généralement, on a le corollaire suivant :

Corollaire 1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I. Soit F une primitive de f sur I. Alors pour tout $(a, b) \in I^2$, on a

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

On note $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$.

Démonstration. Soit $a \in I$.

La fonction $x \longmapsto F(x) - F(a)$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a donc pour tout $x \in I$,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

donc pour tout $b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ et ceci est vrai pour tout $(a,b) \in I^2$. ■

Remarque 10. Ce résultat fondamental permet de calculer facilement des intégrales en utilisant les primitives usuelles.

Exemple 5. • $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.

- $\displaystyle\int_0^\pi \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_2^3 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_2^3 = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$.
- $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^x dx = [e^x]_{\ln(2)}^{\ln(3)} = e^{\ln(3)} - e^{\ln(2)} = 3 - 2 = 1$.

17.2.2 Application à la fonction logarithme néperien

On a défini pour tout $x > 0, \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$.

On peut maintenant montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, propriété qu'on avait admise dans le chapitre ≪ Fonctions réelles usuelles ≫.

Proposition 5

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Démonstration. • Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$.

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$ donc pour tout $t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$.

Par croissance de l'intégrale, on obtient que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k},$$

i.e.

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

En sommant cette double inégalité pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient d'après la relation de Chasles

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

d'où

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

double inégalité vraie pour tout $n \geqslant 2$ et également pour $n = 1$, puisque pour $n = 1$, les sommes sont vides et donc nulles. La double inégalité est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrons que $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

Tout d'abord, la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = (2n - (n+1) + 1)\frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Supposons par l'absurde que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit bornée. Puisqu'elle est croissante, on déduit du théorème de la limite monotone que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.

A fortiori, $\lim_{n \to +\infty} H_{2n} - H_n = l - l = 0$ et en passant à la limite dans l'inégalité $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$, on trouve $0 \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est absurde.

Ainsi, la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et non majorée, donc $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

• On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}, \ln(n) \geqslant H_n - 1$ donc par comparaison $\lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$.

Soit $A > 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0, \ln(n) \geqslant A$.

Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a alors

$$\forall x \geqslant n_0, \ln(x) \geqslant \ln(n_0) \geqslant A,$$

ce qui prouve que $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. ■

Remarque 11. • On a montré que pour tout $n \geqslant 1, H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n$. Puisque pour tout $n \geqslant 1, H_n > 0$, on en déduit que pour tout $n \geqslant 1$,

$$1 - \frac{1}{H_n} \leqslant \frac{\ln(n)}{H_n} \leqslant 1.$$

Puisque $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$, alors $\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{H_n} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{H_n} = 1$ d'où

$$\ln(n) \sim H_n.$$

• Posons pour tout $n \geqslant 1, u_n = H_n - \ln(n)$. On a vu que pour tout $n \geqslant 1, \ln(n) \leqslant H_n$ donc $u_n \geqslant 0$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par 0.

Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant 0$$

comme montré précédemment donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0.

D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente et sa limite est la constante d'Euler-Mascheroni, notée $\gamma \simeq 0,57$.

On a donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma \simeq 0,57$.

17.3 Méthodes de calculs

17.3.1 Intégration par parties

Proposition 6: Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
Alors
$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Démonstration. Notons que toutes les intégrales existent parce que u, v, u', v' et leurs produits sont bien continues sur $[a,b]$.

Par linéarité de l'intégrale, on a
$$\int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Or, la fonction uv est une primitive sur $[a,b]$ de $u'v + uv'$ donc
$$\int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b$$

d'où $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$ ■

Exemple 6. • Calculons $\displaystyle\int_0^1 te^t dt$. Pour cela, effectuons une intégration par parties en posant $u(t) = t, u'(t) = 1, v'(t) = e^t$ et $v(t) = e^t$. On a alors
$$\int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - [e^t]_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

• L'intégration par parties est une méthode efficace pour déterminer des primitives.

Par exemple, déterminons la primitive de arctan sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)dt$.

Posons $u(t) = \arctan(t), u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}, v'(t) = 1$ et $v(t) = t$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt = x\arctan(x) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Ainsi, la fonction $x \longmapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ est l'unique primitive de arctan sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

17.3.2 Changement de variable

Théorème 3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$.
Alors
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt.$$

Démonstration.

Notons que puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, la fonction φ' est continue sur $[\alpha, \beta]$ et par composition, la fonction $f \circ \varphi$ est continue sur $[\alpha, \beta]$ donc par produit, la fonction $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ est continue sur $[\alpha, \beta]$ d'où l'existence de l'intégrale de droite.

Soit F une primitive de f sur l'intervalle I (F existe d'après le théorème fondamental de l'analyse puisque f est continue sur I).

La fonction $F \circ \varphi$ est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ par composition de fonctions dérivables et pour tout $t \in [\alpha, \beta], (F \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t)F'(\varphi(t)) = (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)$.

On a donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = [F \circ \varphi]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt.$$

■

Remarque 12. • On n'a pas nécessairement $\varphi(\alpha) \leqslant \varphi(\beta)$.

• En pratique, quand on effectue un changement de variable pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ en posant $t = \varphi(u) \Leftrightarrow u = \varphi^{-1}(t)$ où φ est bijective d'un intervalle I sur $[a, b]$, on a $dt = \varphi'(u)du$.

Si $t = a, u = \varphi^{-1}(a)$, si $t = b, u = \varphi^{-1}(b)$, on remplace t par $\varphi(u), dt$ par $\varphi'(u)$ et on obtient

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)du,$$

ce qui correspond à la formule ci-dessus en remplaçant a par $\varphi^{-1}(a)$ et b par $\varphi^{-1}(b)$.

• En pratique, quand on effectue un changement de variable pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))dt$, où $\varphi : [a, b] \longrightarrow \varphi([a, b])$ est bijective, on pose $u = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(u)$ d'où "en dérivant", $dt = (\varphi^{-1})'(u)du$.

Si $t = a, u = \varphi(a)$, si $t = b, u = \varphi(b)$, on remplace $\varphi(t)$ par u, dt par $(\varphi^{-1})'(u)du$ et on obtient

$$\int_a^b f(\varphi(t))dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)(\varphi^{-1})'(u)du.$$

Cette recette est justifiée car en appliquant le théorème, on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)(\varphi^{-1})'(u)du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} ((f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})(u)(\varphi^{-1})'(u)du = \int_{\varphi^{-1}(\varphi(a))}^{\varphi^{-1}(\varphi(b))} f \circ \varphi(u)du = \int_a^b f(\varphi(u))du.$$

Exemple 7. • Calculons $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx$.

Posons $\varphi : x \longmapsto \cos(x)$ sur $[0,\pi]$. D'après le théorème, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{\cos(\pi)}^{\cos(0)} \sqrt{1-x^2}dx \\
&= \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2(x)}\cos'(x)dx \\
&= \int_{\pi}^{0} \sqrt{\sin^2(x)}(-\sin(x))dx \\
&= \int_{0}^{\pi} |\sin(x)|\sin(x)dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \sin^2(x)dx \quad (\text{car pour tout } x\in[0,\pi], \sin(x)\geqslant 0) \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi}\cos(2x)dx\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}[\sin(2x)]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

• Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Calculons $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}$.

On a $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2} = \int_0^a \frac{1}{a^2}\frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$.

Posons $u = \dfrac{x}{a} \Leftrightarrow x = au$ d'où $dx = adu$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{a^2}\frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \int_0^1 \frac{1}{a^2}\frac{adu}{u^2+1} = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{a}[\arctan]_0^1 = \frac{\pi}{4a}$.

• Calculons $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)}dt$.

On pose $u = \sin(t)$ d'où $du = \cos(t)dt$ et ainsi $\dfrac{dt}{\cos(t)} = \dfrac{du}{\cos^2(t)} = \dfrac{du}{1-u^2}$. Par ailleurs, quand $t = 0, u = 0$ et quand $t = \frac{\pi}{4}, u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)}dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1-u^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{(1-u)(1+u)} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du = \frac{1}{2}[\ln(1+u)-\ln(1-u)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)}dt = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(2+\sqrt{2}\right) - \ln\left(2-\sqrt{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{1}{2}\ln((\sqrt{2}+1)^2) = \ln(\sqrt{2}+1).$$

Corollaire 2: Intégrale d'une fonction paire ou impaire

Soit $a \geqslant 0$. Soit $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-a, a]$.

1. Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$.
2. Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

Démonstration.

1. Supposons f paire et continue sur $[-a, a]$ et calculons $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt$. D'après la relation de Chasles, on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$. En effectuant le changement de variable $u = -t, (du = -dt)$, on trouve
$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)du = \int_{0}^{a} f(u)du$$
par parité de f.
Ainsi,
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt.$$

2. Supposons f impaire et continue sur $[-a, a]$ et calculons $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt$. D'après la relation de Chasles, on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$. En effectuant le changement de variable $u = -t, (du = -dt)$, on trouve
$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)du = \int_{0}^{a} -f(u)du = -\int_{0}^{a} f(u)du$$
par imparité de f et linéarité de l'intégrale.
Ainsi,
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(t)dt = 0.$$

■

Exemple 8. • $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = 2[\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

• $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)dt = 0$.

• $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2dx = 2\int_{0}^{1} x^2dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

• $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3dx = 0$.

Corollaire 3: Intégrale d'une fonction périodique

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$.

1. Pour tout $(a,b) \in I^2$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.
2. Si $I = \mathbb{R}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Démonstration.

1. Soient $(a,b) \in I^2$, soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisque f est continue sur $[a,b]$ et que f est T-périoque, alors f est continue sur $[a+nT, b+nT]$ et on a par T-périodicité de f,
$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)dt = \int_{a+nT}^{b+nT} f(t-nT)dt.$$
Posons $u = t - nT$, d'où $du = dt$. On en déduit
$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(t-nT)dt = \int_a^b f(u)du$$
d'où $\displaystyle\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n = \left\lfloor \dfrac{a}{T} + 1 \right\rfloor$. On a alors $\dfrac{a}{T} < n \leqslant \dfrac{a}{T} + 1$ d'où $a < nT \leqslant a + T$.
Ainsi, d'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^{nT} f(t)dt + \int_{nT}^{a+T} f(t)dt$.
D'après le premier alinéa, on a $\displaystyle\int_a^{nT} f(t)dt = \int_{a-(n-1)T}^{nT-(n-1)T} f(t)dt = \int_{a-(n-1)T}^{T} f(t)dt$.
De même, $\displaystyle\int_{nT}^{a+T} f(t)dt = \int_{nT-nT}^{a+T-nT} f(t)dt = \int_0^{a-(n-1)T} f(t)dt$.
De nouveau d'après la relation de Chasles, on en déduit
$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^{nT} f(t)dt + \int_{nT}^{a+T} f(t)dt = \int_{a-(n-1)T}^{T} f(t)dt + \int_0^{a-(n-1)T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

■

Exemple 9. • $\displaystyle\int_\pi^{\frac{5\pi}{4}} \tan(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx = [-\ln(|\cos(x)|)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2}$.

• Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \cos(t)dt = \int_0^{2\pi} \cos(t)dt = [\sin(t)]_0^{2\pi} = 0$.

17.4 Sommes de Riemann

17.4.1 Convergence des sommes de Riemann

Définition 5: Suite des sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un segment $[a, b]$.
On appelle suite des sommes de Riemann de la fonction f sur $[a, b]$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ défininie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right).$$

Remarque 13. Concrètement, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on découpe le segment $[a, b]$ en n segments de longueurs égales à $\frac{b-a}{n}$, $\left[a + \frac{k}{n}(b-a), a + \frac{k+1}{n}(b-a)\right]$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, et on calcule la moyenne des valeurs de la fonction en les premiers points de chacun de ces segments, i.e.

$$S_n = \frac{1}{n}\left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + \cdots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

L'importance des sommes de Riemann est justifiée par le théorème suivant :

Théorème 4: Convergence des sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$.
Alors la suite des sommes de Riemann de la fonction f sur $[a, b]$ est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

Remarque 14. Autrement dit, la suite des sommes de Riemann, dont le terme général est la moyenne de n valeurs prises par la fonction f, converge vers la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Démonstration. On admet le théorème dans le cas général. Montrons-le dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \\
= &\left|\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} f(t)dt - \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)dt\right| \text{(Chasles)} \\
= &\frac{1}{b-a}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} \left(f(t) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right)dt\right| \text{(linéarité de l'intégrale)} \\
\leqslant &\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} \left(f(t) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right)dt\right| \text{(inégalité triangulaire)} \\
\leqslant &\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} \left|\left(f(t) - f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right)\right| dt \text{(propriété de l'intégrale).}
\end{aligned}$$

Par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ donc la fonction f' est continue sur $[a,b]$. D'après le théorème des bornes atteintes, on en déduit que f' est bornée sur $[a,b]$. Ainsi, il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in [a,b], |f'(x)| \leqslant M$.

Par ailleurs, puisque f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, pour tout $t \in \left[a+\frac{k}{n}(b-a), a+\frac{k+1}{n}(b-a)\right]$, il existe $c \in \left]a+\frac{k}{n}(b-a), t\right[$ tel que

$$f(t) - f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \left(t - \left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right) f'(c)$$

d'où

$$\left|f(t) - f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right| \leqslant \left|a+\frac{k+1}{n}(b-a) - \left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right| |f'(c)| \leqslant \frac{b-a}{n}M.$$

En injectant cette inégalité dans le calcul, précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right| &\leqslant \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} \left(\frac{b-a}{n}\right) M dt \\
&\leqslant \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 M \\
&\leqslant \frac{b-a}{n}M
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}M = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = 0$ par comparaison d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

$\blacksquare$

Remarque 15. On a ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(a)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(a)}{n} = 0$, il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

De même, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(b)}{n} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) + \frac{f(b)}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

On a donc également

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

17.4.2 Exemples d'application

Le théorème de convergence des sommes de Riemann est très utilie pour calculer des limites de suites a priori compliquées à partir d'intégrales qu'on sait calculer facilement.

• On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$ où $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, avec $a = 0$ et $b = 1$.

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2).$$

• On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{1}{n^n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n > 0$ et

$$\ln(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

avec $a = 1, b = 2$ et $f(x) = \ln(x)$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(S_n) = \int_1^2 \ln(t)dt = [x\ln(x) - x]_1^2 = 2\ln(2) - 2 + 1 = \ln(4) - 1$, donc

$$\lim_{n\to=\infty} S_n = e^{\ln(4)-1} = \frac{4}{e}.$$