
DEVOIR MAISON N°12
A RENDRE POUR LE VENDREDI 14 MARS 2025

Fonctions trigonométriques réciproques

On considère la fonction $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, bijection réciproque de $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ et la fonction $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$, bijection réciproque de $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$.

1. (a) Justifier que la fonction $\arcsin$ est impaire, continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.
(b) Montrer que la fonction $\arcsin$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et calculer sa dérivée.
2. (a) Justifier que la fonction $\arccos$ est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.
(b) Montrer que la fonction $\arccos$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et calculer sa dérivée.
(c) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.
3. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
4. Montrer que

$$\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall x < 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

5. On considère l'équation

$$(E) : \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

- (a) Dériver la fonction $x \mapsto \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ puis dresser son tableau de variation.
Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
 - (b) En déduire que l'équation (E) admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.
 - (c) Résoudre (E).
6. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2 \arctan(\sqrt{x})$.
 7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan(x)$.
 8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.