Corrigé de la liste d'exercices n°16

Dérivation

Exercice 1.

1. On a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} - \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Puisque f est dérivable en a , on sait que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Posons $H = h^2$. On a $H \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$ donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(a+H) - f(a)}{H} = f'(a)$$

donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h} = 0 \times f'(a) - f'(a) = -f'(a).$$

2. On a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a)g(a) - f(a)g'(a).$$

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

A priori, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ mais elle est prolongeable par continuité en 0. En effet, puisque la fonction $\arctan$ est bornée sur $\mathbb{R}$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Par ailleurs, par imparité de la fonction $\arctan$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = (-x)^2 \arctan\left(-\frac{1}{x}\right) = -x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

donc la fonction f est impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étudions les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en calculant ses dérivées successives.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} = 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1+x^2} - 1.$$

Par ailleurs, f est dérivable en 0 puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

donc $f'(0) = 0$.

On dérive à nouveau f' : pour tout $x > 0$,

$$f''(x) = 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{4x+2x^3}{(1+x^2)^2}$$

et

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2} = \pi$$

car $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

Enfin, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= -\frac{2}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{(4 + 6x^2)(1 + x^2)^2 - 4x(1 + x^2)(4x + 2x^3)}{(1 + x^2)^4} \\ &= -\frac{2}{1 + x^2} - \frac{(4 + 6x^2)(1 + x^2) - 4x(4x + 2x^3)}{(1 + x^2)^3} \\ &= -\frac{2(1 + x^2)^2 + 6x^4 + 10x^2 + 4 - 16x^2 - 8x^4}{(1 + x^2)^3} \\ &= -\frac{2 + 4x^2 + 2x^4 - 2x^4 - 6x^2 + 4}{(1 + x^2)^3} \\ &= -\frac{-2x^2 + 6}{(1 + x^2)^3} \\ &= 2 \frac{x^2 - 3}{(1 + x^2)^3}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \geq \sqrt{3}$, $f^{(3)}(x) \geq 0$ et pour tout $x \in]0, \sqrt{3}[$, $f^{(3)}(x) \leq 0$ donc la fonction f'' est strictement croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, \sqrt{3}[$.

La fonction f'' admet donc un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ et celui-ci vaut

$$f''(\sqrt{3}) = 2 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}^3}{16} = \frac{\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{8} < 0.$$

Puisque $f''(0) = \pi > 0$, comme f'' est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante sur $]0, \sqrt{3}[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]0, \sqrt{3}[$ tel que $f''(\alpha) = 0$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$ donc pour tout $x \in [\sqrt{3}, +\infty[$, $f''(x) < 0$.

Ainsi, pour tout $x \in]0, \alpha[$, $f''(x) > 0$ et pour tout $x \in]\alpha, +\infty[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f' est strictement croissante sur $]0, \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$.

On sait que $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ d'où $2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2$, i.e.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 2.$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1+x^2} - 1 = 2 + 0 - 1 = 1$. Puisque f' est strictement croissante sur $]0, \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$ avec $f'(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$, alors pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on a $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car $x^2 \arctan(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2 \frac{1}{x} = x$.

Par imparité de f , on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 3.

1. Soit $f : x \mapsto \arctan(2x) + \arctan(x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2}{1 + (2x)^2} + \frac{1}{1 + x^2} = \frac{2}{1 + 4x^2} + \frac{1}{1 + x^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Calculons les limites de f .

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ donc par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(2x) = -\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\pi$.

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ donc par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(2x) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-\pi, \pi[$.

2. Puisque f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi, \pi[$, il existe un unique réel x tel que $f(x) = \frac{\pi}{4}$ donc l'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
3. Soit x la solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$\tan(\arctan(2x) + \arctan(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{\tan(\arctan(2x)) + \tan(\arctan(x))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(2x))} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{1 - 2x^2} = 1,$$

ce qui implique que $2x^2 + 3x - 1 = 0$. Les racines de ce trinôme du second degré sont

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} < 0 \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} > 0.$$

Or, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$ donc l'unique antécédent de $\frac{\pi}{4}$ par la fonction f est nécessairement strictement positif.

On en déduit que l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{4}$.

Exercice 4.

1. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $\cos' = -\sin$, $\cos^{(2)} = -\cos$, $\cos^{(3)} = \sin$, $\cos^{(4)} = \cos$.

On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ (donc $\cos$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^{(4n)} = \cos$, $\cos^{(4n+1)} = -\sin$, $\cos^{(4n+2)} = -\cos$ et $\cos^{(4n+3)} = \sin$.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$.

• **Initialisation** : pour $n = 0$, on a bien f de classe $\mathcal{C}^0$, i.e. continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{0!}{(2-x)^{0+1}}$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}$. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et

que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(2-x)^{n+2}}$.

Posons $u(x) = 2 - x$. On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{u^{n+1}(x)}$. Puisque u est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, on en déduit que $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{(n+1)n!u'(x)}{u^{n+2}(x)} = \frac{(n+1)!}{(2-x)^{n+2}}.$$

Puisque $f^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(2-x)^{n+1}}.$$

Exercice 5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{2x^2e^{x^2} - e^{x^2} + 1}{x^2} = 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}.$$

Montrons que f est dérivable en 0. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc par composition, on en déduit que $e^{x^2} - 1 \underset{0}{\sim} x^2$, d'où

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

On a donc montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il reste à établir que f' est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. Il reste à vérifier la continuité de f' en 0.

On a déjà montré que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$ et on a $\lim_{x \rightarrow 0} 2e^{x^2} = 2$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 2 - 1 = 1 = f'(0),$$

ce qui prouve que f' est continue en 0, et finalement f' est bien continue sur $\mathbb{R}$.

On en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : « Si f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et pour tout $x \in I$,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x). \gg$$

•**Initialisation** : Pour $n = 0$, si f et g sont de classe $\mathcal{C}^0$ sur I , on sait que fg est bien de classe $\mathcal{C}^0$, i.e. continue sur I car f et g le sont et on a pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)}(x)g^{(0-k)}(x) = f(x)g(x) = (fg)^{(0)}(x),$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

•**Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons la propriété P_n vraie et montrons la propriété P_{n+1} .

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . A fortiori, f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Par hypothèse de récurrence, on en déduit que fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et que pour tout $x \in I$,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Montrons que fg est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et que pour tout $x \in I$,

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x).$$

Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont dérivables sur I donc la fonction $x \mapsto f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)$.

Ainsi, $(fg)^{(n)}$ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I et on a pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \left(\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0 \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \quad (\text{Relation de Pascal}), \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Exercice 7.

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. **•Initialisation :**

Pour $n=0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{u_0 + v_0 \ln(x)}{x^{0+1}}$ avec $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$, donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

•Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose qu'il existe deux réels u_n et v_n tels que pour tout réel x strictement positif, on ait $f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}}$.

Montrons la propriété au rang $n+1$, c'est à dire montrons qu'il existe deux réels u_{n+1} et v_{n+1} tels que pour tout réel x strictement positif, on ait $f^{(n+1)}(x) = \frac{u_{n+1} + v_{n+1} \ln(x)}{x^{n+2}}$.

En dérivant $f^{(n)}$, on a pour tout $x > 0$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\frac{v_n}{x} \times x^{n+1} - (n+1)x^n(u_n + v_n \ln(x))}{(x^{n+1})^2} = \frac{v_n - (n+1)u_n - (n+1)v_n \ln(x)}{x^{n+2}}.$$

Posons $u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n$ et $v_{n+1} = -(n+1)v_n$ et on a bien $f^{(n+1)}(x) = \frac{u_{n+1} + v_{n+1} \ln(x)}{x^{n+2}}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Utilisons la formule de Leibniz pour calculer $f^{(n)}$.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \frac{1}{x}$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$ (ceci se montre par une récurrence immédiate).

Par ailleurs, remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln^{(k)}(x) = g^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$.

D'après la formule de Leibniz, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \ln(x) \times g(x)$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \ln(x) g^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \frac{(-1)^n n! \ln(x)}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} \frac{(-1)^{n-k} (n-k)!}{x^{n-k+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n! \ln(x)}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^{n-1} n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^{n-1} n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $v_n = (-1)^n n!$.

Exercice 8.

1. $t \mapsto \frac{(2t+1)^8}{16}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. $u \mapsto \frac{1}{3} \ln(|u|)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
3. $x \mapsto e^{\sin(x)}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. $t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$ définie et dérivable sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.
5. $x \mapsto \frac{1}{2} (\ln(x))^2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. $x \mapsto 2e^{\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. $u \mapsto \ln(\ln(u))$ définie et dérivable sur $]1, +\infty[$.

Exercice 9. Puisque $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, on sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a + \alpha[$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, ce qui implique que pour tout $x \in]a, a + \alpha[$, $f(x) - f(a) > 0$ (car $x - a > 0$).

En particulier, $f(a + \alpha) > f(a) = 0$.

De même, puisque $f'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0$, on sait qu'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $x \in]b - \beta, b[$, $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0$, ce qui implique que pour tout $x \in]b - \beta, b[$, $f(x) - f(b) < 0$ (car $x - b < 0$).

En particulier, $f(b - \beta) < f(b) = 0$.

Puisque f est continue (car dérivable) sur $[a, b]$, que $f(a + \alpha) > 0$ et $f(b - \beta) < 0$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe c_2 entre $a + \alpha$ et $b - \beta$, donc $c_2 \in]a, b[$ tel que $f(c_2) = 0$.

Puisque f est continue sur $[a, c_2]$, dérivable sur $]a, c_2[$, telle que $f(a) = f(c_2) = 0$, on déduit du théorème de Rolle qu'il existe $c_1 \in]a, c_2[$ tel que $f'(c_1) = 0$.

De même, puisque f est continue sur $[c_2, b]$, dérivable sur $]c_2, b[$, telle que $f(b) = f(c_2) = 0$, on déduit du théorème de Rolle qu'il existe $c_3 \in]c_2, b[$ tel que $f'(c_3) = 0$.

On a donc bien $a < c_1 < c_2 < c_3 < b$ tel que $f(c_2) = f'(c_1) = f'(c_3) = 0$.

Exercice 10.

1. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $h(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$.

La fonction h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ car f et g le sont.

De plus, on a $h(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(b)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

Or, $h'(c) = g'(c)(f(b) - f(a)) - f'(c)(g(b) - g(a))$ donc

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

2. (a) Montrons que pour tout $x \in]a, b]$, $g(x) \neq 0$.

S'il existait $x \in]a, b]$ tel que $g(x) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existerait $c \in]a, x[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui est absurde.

Donc pour tout $x \in]a, b]$, $g(x) \neq 0$.

- (b) Soit $x \in]a, b]$. D'après la question précédente, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que

$$g'(c_x)(f(x) - f(a)) = f'(c_x)(g(x) - g(a)),$$

d'où $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ puisque $f(a) = g(a) = 0$.

Or, puisque pour tout $x \in]a, a + \alpha]$, $a < c_x < x$, on a d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow a} c_x = a$. Par ailleurs, on sait que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, donc par composition

de limites, on obtient $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = l$, d'où $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Exercice 11. • Supposons que a ne soit pas une extrémité de I , i.e. $\exists \alpha > 0$, $[a - \alpha, a + \alpha] \subset I$.

Soit $x \in [a - \alpha, a[$. Puisque f est continue sur $[x, a]$, dérivable sur $]x, a[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c_x \in]x, a[$ tel que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$.

Puisque pour tout $x \in [a - \alpha, a]$, $x < c_x < a$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow a^-} c_x = a$. Or, $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$ donc par composition de limites, on en déduit que

$\lim_{x \rightarrow a^-} f'(c_x) = l$, d'où $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$, ce qui prouve que f est dérivable à gauche en a et que $f'_g(a) = l$.

De même, soit $x \in]a, a + \alpha]$. Puisque f est continue sur $[a, x]$, dérivable sur $]a, x[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c_x \in]a, x[$ tel que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$.

Puisque pour tout $x \in [a, a + \alpha]$, $a < c_x < x$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow a^+} c_x = a$. Or, $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$ donc par composition de limites, on en déduit que

$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(c_x) = l$, d'où $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$, ce qui prouve que f est dérivable à droite en a et que $f'_d(a) = l$.

Finalement f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

• Si a est une des extrémités de l'intervalle I , un seul des deux calculs de dérivée à gauche ou à droite suffit à conclure que f est dérivable en a et que $f'(a) = l$.

Exercice 12. Posons $g : x \mapsto e^x(f'(x) - f(x))$. Puisque f est deux fois dérivable sur $[a, b]$, on en déduit que g est dérivable sur $[a, b]$ donc continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Par ailleurs, $g(a) = e^a(f'(a) - f(a)) = 0$ et $g(b) = e^b(f'(b) - f(b)) = 0$.

D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or, $g'(c) = e^c(f'(c) - f(c) + f''(c) - f'(c)) = e^c(f''(c) - f(c)) = 0$. Puisque $e^c \neq 0$, ceci implique que $f''(c) - f(c) = 0$, d'où $f(c) = f''(c)$.

Exercice 13. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, ce qui est légitime car $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. La fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ car f et $x \mapsto x$ le sont.

Par ailleurs, $g(a) = g(b) = 0$ car $f(a) = f(b) = 0$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or, $g'(c) = \frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0$ donc $cf'(c) - f(c) = 0$, i.e. $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$, car $c \neq 0$.

Exercice 14. Soient l et l' deux réels tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l'$.

Supposons par l'absurde que $l' \neq 0$. Dans un premier temps, on suppose $l' > 0$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l' > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $f'(x) > \frac{l'}{2}$.

Soit $x > A$. Puisque f est continue sur $[A, x]$ et dérivable sur $]A, x[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]A, x[$ tel que $f(x) - f(A) = f'(c)(x - A) > \frac{l'}{2}(x - A)$.

Ainsi, pour tout $x > A$, $f(x) > f(A) + \frac{l'}{2}(x - A)$. Puisque $l' > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(A) + \frac{l'}{2}(x - A) = +\infty$, donc par comparaison, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, ce qui contredit notre hypothèse de départ.

De même, si $l' < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} -f'(x) = -l' > 0$ donc d'après ce qui précède, on en déduit que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = +\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, ce qui est de nouveau absurde.

Il est donc absurde de supposer $l' \neq 0$.

On a donc nécessairement $l' = 0$, i.e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Exercice 15. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = f(c)(x - a)(x - b) - (c - a)(c - b)f(x)$. Puisque $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$, on a également $g \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$.

On a $g(a) = g(c) = g(b) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, on en déduit qu'il existe $\alpha \in]a, c[$ et $\beta \in]c, b[$ tels que $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$.

Puisque g' est continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur $] \alpha, \beta [$, on peut de nouveau appliquer le théorème de Rolle sur $[\alpha, \beta]$ et on en déduit qu'il existe $\gamma \in] \alpha, \beta [\subset] a, b [$ tel que $g''(\gamma) = 0$.

Or, pour tout $x \in [a, b]$,

$$g'(x) = f(c)(2x - (a + b)) - (c - a)(c - b)f'(x) \quad \text{et} \quad g''(x) = 2f(c) - (c - a)(c - b)f''(x)$$

donc

$$g''(\gamma) = 0 \Leftrightarrow f(c) = \frac{(c - a)(c - b)}{2} f''(\gamma).$$

Exercice 16.

- (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{2}{5}x$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$

La fonction f est continue et décroissante sur $[0, 1]$ donc

$$f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right] \subset [0, 1].$$

(b) On a

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{5}(4 - x^2) = x \Leftrightarrow x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 - \sqrt{41}}{2} \text{ ou } x = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2}.$$

(c) On a pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| = \left| -\frac{2}{5}x \right| = \frac{2}{5}|x| \leq \frac{2}{5}$.

2. (a) $l = \frac{\sqrt{41} - 5}{2}$.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$. **•Initialisation :**

$$u_0 \in [0, 1].$$

•Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in [0, 1]$.

On a $u_{n+1} = f(u_n) \in f([0, 1]) \subset [0, 1]$ donc $u_{n+1} \in [0, 1]$ ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)|$.

Puisque $u_n \in [0, 1]$ et $l \in [0, 1]$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(u_n) - f(l) = f'(c)(u_n - l)$ i.e. $|u_{n+1} - l| = |f'(c)||u_n - l|$.

Or, puisque $c \in]0, 1[$, on a $|f'(c)| \leq \frac{2}{5}$, d'où $|u_{n+1} - l| \leq \frac{2}{5}|u_n - l|$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, puisque $u_0 \in [0, 1]$ et que $l \in [0, 1]$, $|u_0 - l| \leq 1 = \left(\frac{2}{5}\right)^0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

D'après la question précédente, $|u_{n+1} - l| \leq \frac{2}{5}|u_n - l| \leq \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - l| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Puisque $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

(f) D'après la question d, il suffit que

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 10^{-10} \Leftrightarrow e^{n \ln\left(\frac{2}{5}\right)} \leq 10^{-10} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{5}\right) \leq -10 \ln(10) \Leftrightarrow n \geq -\frac{10 \ln(10)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$$

car $\ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0$.

Puisque $-\frac{10 \ln(10)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \simeq 25,12$, le n_0 cherché est $n_0 = 26$.

Sinon, on peut aussi utiliser le script suivant en Python :

```
n=0
while (2/5)**n>10**(-10):
    n+=1
print(n)
```