Devoir maison n°13
A rendre pour le mardi 1er avril 2025

Problème 1 : Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale de Wallis

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx.$$

1. Vérifier que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ et $W_{2n+1} = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.
4. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.
5. Montrer que $W_n \sim W_{n+1}$ et en conclure que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
6. (a) Démontrer que pour tout $x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$.

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

   (c) En utilisant dans la première intégrale le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin(t)$ et dans la troisième intégrale le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(t)$, en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

   (d) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ s'appelle l'intégrale de Gauss et elle vaut donc $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Problème 2 : Irrationalité de π

Le but de ce problème est de montrer que le nombre réel π est irrationnel, c'est à dire qu'il n'existe pas d'entiers $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $\pi = \dfrac{a}{b}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $f_n(t) = (t-t^2)^n$ et l'intégrale I_n donnée par

$$I_n = \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\int_0^1 f_n(t)\sin(\pi t)\mathrm{dt}.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1.

   (b) Soit $n \geq 2$. Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_n''(t) = -2n(2n-1)f_{n-1}(t) + n(n-1)f_{n-2}(t)$$

   et en déduire que

$$I_n = 2(2n-1)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que

$$\forall t \in [0,1], 0 \leq f_n(t)\sin(\pi t) \leq \frac{1}{4^n}$$

   et en déduire que

$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi^{2n+1}}{4^n n!}.$$

3. Dans cette question, on utilise les résultats des questions 1 et 2 afin de démontrer que π est un nombre irrationnel. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que π est rationnel, c'est à dire qu'il existe a et b deux entiers naturels non nuls tels que $\pi = \dfrac{a}{b}$.

   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, b^n I_n \in \mathbb{N}$.

   (b) Démontrer que la suite $(b^n I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

   (c) Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $I_{n_0} = 0$ et aboutir à une contradiction.