BCPST1
A. Panetta

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°6
Samedi 15 mars 2025 (4h00)

Exercice 1 : Une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2

1. (a) Les fonctions $x \mapsto \pi - x, x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont dérivables sur I.
Par ailleurs, pour tout $x \in I, \sin(x) > 0$ et $x \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction $x \mapsto \ln(\sin(x))$ est dérivable sur I.
Finalement, la fonction f est dérivable sur I comme somme, produit et composée de fonctions dérivables et on a

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f'(x) &= -\cos(x) - (\pi - x)\sin(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\sin(x) + \ln(\sin(x))\cos(x) \\ &= (x-\pi)\sin(x) + \ln(\sin(x))\cos(x). \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons, f' est dérivable sur I et on a

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f''(x) &= \sin(x) + (x-\pi)\cos(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\cos(x) - \ln(\sin(x))\sin(x) \\ &= (x-\pi)\cos(x) + \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin(x)} - \ln(\sin(x))\sin(x) \\ &= \frac{1}{\sin(x)} - (\pi - x)\cos(x) - \ln(\sin(x))\sin(x) \\ &= \frac{1}{\sin(x)} - f(x) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } x \in I, f''(x) + f(x) = \frac{1}{\sin(x)}.}$

(b) • Considérons l'équation homogène (H) associée à (E) :

$$(H) : \forall x \in I, y''(x) + y(x) = 0.$$

L'équation caractéristique associée à (E) est

$$r^2 + 1 = 0$$

dont les racines sont les nombres complexes conjugués $\alpha + i\beta = i$ et $\alpha - i\beta = -i$ avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.
Les solutions de l'équation (H) sur I sont donc

$$\mathcal{S}_H = \{y : x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{y : x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

• La fonction $f : x \mapsto (\pi - x)\cos(x) + \ln(\sin(x))\sin(x)$ est solution particulière de (E) d'après la question précédente. D'après le théorème de structure des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) sur I est

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \{y : x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + (\pi - x)\cos(x) + \ln(\sin(x))\sin(x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

2. On a $\lim\limits_{x\to\pi^-} \sin(x) = 0^+$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$.
   Ainsi, par composition de limites, il en découle que $\lim\limits_{x\to\pi^-} \ln(\sin(x))\sin(x) = 0$.
   Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to\pi^-} (\pi - x)\cos(x) = 0$.
   Ainsi, par somme de limites, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = 0}$ donc

$$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } \pi \text{ en posant } f(\pi) = 0.}$$

3. La fonction f est dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$ donc la courbe représentative de la fonction f admet une tangente en $\dfrac{\pi}{2}$ d'équation

$$\boxed{y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}x.}$$

4. (a) Pour tout $x \in I = \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, $(\pi - x) \geqslant 0$ et $\cos(x) \leqslant 0$ donc par produit $(\pi - x)\cos(x) \leqslant 0$.
   Par ailleurs, pour tout $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\sin(x) \in]0, 1]$ donc $\ln(\sin(x)) \leqslant 0$. Par produit, pour tout $x \in I, \ln(\sin(x))\sin(x) \leqslant 0$.
   Enfin, par somme, $\boxed{\text{pour tout } x \in I, f(x) = (\pi - x)\cos(x) + \ln(\sin(x))\sin(x) \leqslant 0.}$

   (b) D'après la question 1.(a), pour tout $x \in I, f''(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - f(x)$.
   Or, d'après la question précédente, pour tout $x \in I, -f(x) \geqslant 0$ donc $\dfrac{1}{\sin(x)} - f(x) \geqslant \dfrac{1}{\sin(x)}$ d'où

$$\boxed{\text{pour tout } x \in I, f''(x) \geqslant \frac{1}{\sin(x)}.}$$

   (c) Pour tout $x \in I, \sin(x) > 0$ donc pour tout $x \in I, f''(x) \geqslant \dfrac{1}{\sin(x)} > 0$.
   On en déduit que $\boxed{f' \text{ est strictement croissante sur } I.}$

   (d) Tout d'abord, notons que $f' : x \mapsto (x - \pi)\sin(x) + \ln(\sin(x))\cos(x)$ est continue sur I comme composée d'applications continues sur I.
   On a $\boxed{f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2} < 0.}$
   On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pi^-} \sin(x) & = & 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) & = & -\infty \end{cases}$ donc par composition de limites,

$$\lim_{x\to\pi^-} \ln(\sin(x)) = -\infty.$$

   Puisque $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cos(x) = -1$, on a par produit de limites $\lim\limits_{x\to\pi^-} \ln(\sin(x))\cos(x) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim_{x\to\pi^-}(x-\pi)\sin(x)=0$ donc par somme de limites, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = \lim_{x\to\pi^-}(x-\pi)\sin(x)+\ln(\sin(x))\cos(x)=+\infty.}$$

Puisque f' est continue et strictement croissante sur I, donc sur $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, on déduit du théorème de la bijection que f' réalise une bijection de $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ sur l'intervalle $f'\left(\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)=\left]f'\left(\frac{\pi}{2}\right),\lim_{x\to\pi^-}f'(x)\right[=\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$.
Puisque $0\in f'\left(\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$, par continuité et injectivité de f', on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'$\boxed{\text{il existe un unique réel } \alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\text{ tel que } f'(\alpha)=0.}$

(e)
```
from math import *

def derivee_f(x):
    if x==pi:
        return 1
    else:
        return (x-pi)*sin(x)+log(sin(x))*cos(x)

a,b=pi/2,pi
while b-a>10**(-3):
    if derivee_f((a+b)/2)<0:
        a=(a+b)/2
    else:
        b=(a+b)/2
print((a+b)/2)
```
Ceci renvoie la valeur suivante : 2.4892673235414247.

(f) On a $f'(\alpha)=0=(\alpha-\pi)\sin(\alpha)+\ln(\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.
Puisque $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, $\cos(\alpha)\neq 0$ et on en déduit $\ln(\sin(\alpha))=\dfrac{(\pi-\alpha)\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.
Ainsi,

$$f(\alpha)=(\pi-\alpha)\cos(\alpha)+\ln(\sin(\alpha))\sin(\alpha)=\frac{\pi-\alpha}{\cos(\alpha)}(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)).$$

Puisque $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$, on en déduit que $\boxed{f(\alpha)=\dfrac{\pi-\alpha}{\cos(\alpha)}.}$

(g) La fonction f' est strictement croissante sur I et $f'(\alpha)=0$ pour un certain réel $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, on en déduit que pour tout $x\in\left[\frac{\pi}{2},\alpha\right[$, $f'(x)<0$ et pour tout $x\in]\alpha,\pi[$, $f'(x)>0$ donc f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\alpha\right]$ et stictement croissante sur $[\alpha,\pi]$.
On en déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	$\frac{\pi}{2}$		α		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

Problème 1 : Une population de saumons

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = by_{n+1} = by_n e^{r - \frac{r}{p} y_n} = x_n e^r e^{-by_n},$$

d'où, avec les notations de l'énoncé,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \alpha x_n e^{-x_n}.}$$

Si $x_0 = 0$, on obtient par une récurrence immédiate que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, x_n = 0.}$

2.
```
from math import exp

def suiteX(n,alpha,x0):
    L=[x0]
    for k in range(1,n+1):
        L.append(alpha*L[-1]*exp(L[-1]))
    return L
```

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n > 0$.
•**Initialisation :** Pour $n = 0, x_0 > 0$ par hypothèse.
•**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $x_n > 0$.
On a alors $x_{n+1} = \alpha x_n e^{-x_n}$. Or, $\alpha = e^r > 0, x_n > 0$ par hypothèse de récurrence et $e^{-x_n} > 0$ donc $x_{n+1} > 0$ comme produit de termes strictement positifs, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.
On a bien montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, x_n > 0.}$

4. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$g_\alpha(x) = f_\alpha(x) - x = \alpha x e^{-x} - x = x(\alpha e^{-x} - 1).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+, x \geqslant 0$ donc le signe de $g_\alpha(x)$ dépend de $\alpha e^{-x} - 1$.
Or, on a

$$\begin{aligned} \alpha e^{-x} - 1 \geqslant 0 &\Leftrightarrow \alpha e^{-x} \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow e^{-x} \geqslant \frac{1}{\alpha} \quad \text{car } \alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow -x \geqslant \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{par stricte croissance de ln} \\ &\Leftrightarrow -x \geqslant -\ln(\alpha) \\ &\Leftrightarrow x \leqslant \ln(\alpha). \end{aligned}$$

On peut en conclure que

$$\boxed{g_\alpha(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \ln(\alpha) \quad \text{et} \quad g_\alpha(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \ln(\alpha).}$$

5. On a les équivalences suivantes :

$$f_\alpha(x) = x \Leftrightarrow g_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow x(\alpha e^{-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(\alpha).$$

Or, $\alpha = e^r$ avec $r > 0$ donc $\alpha > 1$, ce qui implique que $\ln(\alpha) > 0$.
Ainsi, $\ln(\alpha) \neq 0$ donc $\boxed{f_\alpha \text{ admet deux points fixes distincts : } 0 \text{ et } \ln(\alpha).}$

6. La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'_\alpha(x) = \alpha e^{-x} - \alpha x e^{-x} = \alpha e^{-x}(1-x).$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \alpha e^{-x} > 0$, le signe de $f'_\alpha(x)$ dépend de celui de $1-x$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		$+$	0	$-$	
f_α	0	$\nearrow$	$\dfrac{\alpha}{e}$	$\searrow$	0

On a $f_\alpha(0) = 0$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \alpha \dfrac{x}{e^x} = 0$.
Puisque pour tout $x < 1, f'_\alpha(x) < 0$ et pour tout $x > 1, f'_\alpha(x) > 0$, on en déduit que f_α est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc $\boxed{f_\alpha \text{ admet un maximum en } x = 1}$ qui vaut $\boxed{f_\alpha(1) = \dfrac{\alpha}{e}.}$

7. Pour tout $x \in [0,1[, f'_\alpha(x) > 0$ donc la fonction f_α est strictement croissante et continue sur $[0,1]$. D'après le théorème de la bijection, f_α réalise une bijection de $[0,1]$ sur $f_\alpha([0,1]) = [0, \frac{\alpha}{e}]$.
Puisque $\alpha > e, \dfrac{\alpha}{e} > 1$ donc $1 \in \left[0, \dfrac{\alpha}{e}\right[= f_\alpha([0,1[)$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires et par injectivité de f_α sur $[0,1[$, on en déduit qu' $\boxed{\text{il existe un unique réel } \lambda_\alpha \in [0,1[\text{ tel que } f_\alpha(\lambda_\alpha) = 1.}$
De même, pour tout $x \in]1,+\infty[, f'_\alpha(x) < 0$ donc la fonction f_α est strictement décroissante et continue sur $[1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, f_α réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f_\alpha([1+\infty[) =]0, \frac{\alpha}{e}]$.
Puisque $\dfrac{\alpha}{e} > 1$, on a $1 \in \left]0, \dfrac{\alpha}{e}\right[= f_\alpha(]1,+\infty[)$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires et par injectivité de f_α sur $]1,+\infty[$, on en déduit qu' $\boxed{\text{il existe un unique réel } \mu_\alpha \in]1,+\infty[\text{ tel que } f_\alpha(\mu_\alpha) = 1.}$

8. (a) Puisque $\alpha > 0$, on peut écrire

$$f_\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right) = \frac{\alpha^2}{e} e^{-\frac{\alpha}{e}} = e^{2\ln(\alpha)} e^{1-\frac{\alpha}{e}}$$

d'où

$$\boxed{f_\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right) = e^{2\ln(\alpha)-1-\frac{\alpha}{e}}.}$$

(b) La fonction h est dérivable sur $]e, e^2[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]e, e^2[$ et on a pour tout $x \in]e, e^2[$:

$$h'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{e} = \frac{2e - x}{ex}.$$

Pour tout $x \in]e, e^2[, ex > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $2e - x$. Puisque $e < 2e < e^2$ (car $e > 2$), on en déduit le tableau de variation suivant :

x	e		$2e$		e^2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	$h(2e)$	$\searrow$	3-e

On a

$$h(e) = 2\ln(e) - 1 - \frac{e}{e} = 0;$$

$$h(2e) = 2\ln(2e) - 1 - \frac{2e}{e} = 2\ln(2) + 2\ln(e) - 3 = 2\ln(2) - 1 > 0$$

et

$$h(e^2) = 2\ln(e^2) - 1 - \frac{e^2}{e} = 4 - 1 - e = 3 - e > 0.$$

Puisque pour tout $x \in]e, 2e[, h'(x) > 0$ et pour tout $x \in]2e, e^2[, h'(x) < 0$, la fonction h est strictement croissante sur $]e, 2e]$ et strictement décroissante sur $[2e, e^2[$.
Ainsi, pour tout $x \in]e, 2e], h(x) > h(e) = 0$ et pour tout $x \in [2e, e^2[, h(x) > h(e^2) = 3 - e > 0$.
Finalement, on a bien $\boxed{\text{pour tout } x \in]e, e^2[, h(x) > 0.}$

(c) D'après la question 8.(a), $f_\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right) = e^{h(\alpha)}$. Or, $\alpha \in]e, e^2[$ donc d'après la question précédente, $h(\alpha) > 0$, ce qui implique que $\boxed{f_\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right) = e^{h(\alpha)} > 1.}$

D'après la question 7, μ_α est l'unique réel de $]1, +\infty[$ tel que $f_\alpha(\mu_\alpha) = 1$ donc $f_\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right) > f_\alpha(\mu_\alpha)$.

Puisque $\alpha > e$, $\frac{\alpha}{e} > 1$. Or, d'après la question 6, la fonction f_α est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc $f_\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right) > f_\alpha(\mu_\alpha) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{e} < \mu_\alpha$.

Finalement, on a bien $\boxed{\frac{\alpha}{e} \in]1, \mu_\alpha[.}$

(d) D'après le tableau de variation de la fonction f_α établi en question 6, et par définition de λ_α et μ_α, on a

$$f_\alpha([\lambda_\alpha, \mu_\alpha]) = f_\alpha([\lambda_\alpha, 1] \cup [1, \mu_\alpha]) = f_\alpha([\lambda_\alpha, 1]) \cup f_\alpha([1, \mu_\alpha]) = \left[1, \frac{\alpha}{e}\right] \cup \left[1, \frac{\alpha}{e}\right]$$

donc $\boxed{f_\alpha([\lambda, \mu_\alpha]) = \left[1, \frac{\alpha}{e}\right] \subset [1, \mu_\alpha]}$ (car $\frac{\alpha}{e} \in]1, \mu_\alpha[$).

En particulier, on a également obtenu que $\boxed{f_\alpha([1, \mu_\alpha]) = \left[1, \frac{\alpha}{e}\right] \subset [1, \mu_\alpha].}$

9. On suppose par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in [0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$.

(a) Montrons que pour tout $n \geqslant 1, x_n \in [0, 1]$.
Soit $n \geqslant 1$.
On a $x_n = f_\alpha(x_{n-1})$ (avec $n - 1 \geqslant 0$).
Par hypothèse, $x_{n-1} \in [0, \lambda_\alpha[$ ou $x_{n-1} \in]\mu_\alpha, +\infty[$.

$\star$ Si $x_{n-1} \in [0, \lambda_\alpha[$, alors par continuité et croissance de f_α sur $[0,1]$, on a

$$x_n = f_\alpha(x_{n-1}) \in f_\alpha([0, \lambda_\alpha[) = [f_\alpha(0), f_\alpha(\lambda_\alpha)[= [0,1[.$$

$\star$ Si $x_{n-1} \in]\mu_\alpha, +\infty[$, alors par continuité et décroissance de f_α sur $[1, +\infty[$, on a

$$x_n = f_\alpha(x_{n-1}) \in f_\alpha(]\mu_\alpha, +\infty[) =]0,1[.$$

Dans les deux cas, $x_n \in [0,1]$, ce qui prouve que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, x_n \in [0,1].}$

(b) Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$x_{n+1} - x_n = f_\alpha(x_n) - x_n = g_\alpha(x_n).$$

D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1, x_n \in [0,1]$ donc $x_n \leqslant 1 < \ln(\alpha)$ car $\alpha > e$.
Or, d'après la question 4, pour tout $x \leqslant \ln(\alpha), g_\alpha(x) \geqslant 0$ donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$x_{n+1} - x_n = g_\alpha(x_n) \geqslant 0,$$

ce qui prouve que $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante.}}$

(c) D'après les deux questions précédentes, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par 1.
D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$
Notons l la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Puisque pour tout $n \geqslant 1, 0 \leqslant x_n \leqslant 1$, il en découle par passage à la limite dans les inégalités que $0 \leqslant l \leqslant 1$.
Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1, x_{n+1} = f_\alpha(x_n)$. Par continuité de f_α sur $[0,1]$, on en déduit que

$$l = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f_\alpha(x_n) = f_\alpha(l)$$

donc l est un point fixe de f_α sur $[0,1]$.
D'après la question 5, on en déduit que $l = 0$ ou $l = \ln(\alpha)$.
Puisque $\alpha > e, \ln(\alpha) > 1$. Or, $l \in [0,1]$ donc $l = \ln(\alpha)$ est impossible.
Par ailleurs d'après la question précédente, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante donc pour tout $n \geqslant 1, x_n \geqslant x_1$ donc par passage à la limite dans l'inégalité précédente, $l \geqslant x_1$.
Or, d'après la question 3, $x_1 > 0$ donc $l > 0$, ce qui rend $l = 0$ impossible.
On aboutit bien à une contradiction.

L'hypothèse faite que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in [0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$ est impossible, on en déduit qu'

$$\boxed{\text{il existe un entier } n_0 \text{ tel que } x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha].}$$

10. Montrons par récurrence que pour tout $n > n_0, x_n \in [1, \mu_\alpha]$.
• **Initialisation :** Pour $n = n_0 + 1$, on a $x_n = f_\alpha(x_{n_0})$.
Or, par définition $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$ et d'après la question 8.(d), $f_\alpha([\lambda_\alpha, \mu_\alpha]) \subset [1, \mu_\alpha]$ donc $x_n = f_\alpha(x_{n_0}) \in [1, \mu_\alpha]$, ce qui prouve la propriété au rang $n = n_0 + 1$.
• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n > n_0$ fixé. On suppose que $x_n \in [1, \mu_\alpha]$.
Montrons que $x_{n+1} \in [1, \mu_\alpha]$.
On a $x_{n+1} = f_\alpha(x_n)$.
Or, par hypothèse de récurrence $x_n \in [1, \mu_\alpha]$ donc $x_{n+1} \in f_\alpha([1, \mu_\alpha]) \subset [1, \mu_\alpha]$ d'après la question 8.(d), ce qui permet de conclure que $x_{n+1} \in [1, \mu_\alpha]$.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que

$$\boxed{\forall n > n_0, x_n \in [1, \mu_\alpha].}$$

11. (a) On a trouvé en question 6 que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f'_\alpha(x) = \alpha e^{-x}(1-x)$.
La fonction f'_α est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f''_\alpha(x) = -\alpha e^{-x}(1-x) - \alpha e^{-x} = \alpha e^{-x}(x-2).$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \alpha e^{-x} > 0$, le signe de $f''_\alpha(x)$ est celui de $x-2$ et on obtient le tableau de variation suivant sur $[1,+\infty[$:

x	1		2		$+\infty$
$f''_\alpha(x)$		$-$	0	$+$	
f'_α	0	$\searrow$	$-\alpha e^{-2}$	$\nearrow$	0

On a $1-x \underset{+\infty}{\sim} -x$ donc $f'_\alpha(x) \underset{+\infty}{\sim} -\alpha x e^{-x}$.
Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_\alpha(x) = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in [1,+\infty[, -\alpha e^{-2} \leqslant f'_\alpha(x) \leqslant 0$ donc $|f'_\alpha(x)| \leqslant \alpha e^{-2} = M$.
Or, $\alpha < e^2$ donc $0 \leqslant M = \alpha e^{-2} < 1$.
On a donc bien prouvé l'existence d'un réel $\boxed{M \in [0,1[}$ tel que

$$\boxed{\forall x \in [1,+\infty[, |f'_\alpha(x)| \leqslant M.}$$

(b) Soit $x \geqslant 1$. Puisque $\alpha > e, \ln(\alpha) > 1$.
- Notons que si $x = \ln(\alpha)$, la propriété à montrer est triviale car $f_\alpha(\ln(\alpha)) = \ln(\alpha)$.
- On suppose dorénavant $x \neq \ln(\alpha)$.

Puisque la fonction f_α est dérivable sur $[1,+\infty[$, elle est continue sur $[x,\ln(\alpha)]$ si $x \leqslant \ln(\alpha)$ (resp. $[\ln(\alpha),x]$ si $\ln(\alpha) \leqslant x$) et dérivable sur $]x,\ln(\alpha)[$ si $x \leqslant \ln(\alpha)$ (resp. $]\ln(\alpha),x[$ si $\ln(\alpha) \leqslant x$).
D'après le théorème des accroissements finis, on en déduit qu'il existe un réel $c \in]x,\ln(\alpha)[$ si $x \leqslant \ln(\alpha)$ (resp.$]\ln(\alpha),x[$ si $\ln(\alpha) \leqslant x$) tel que

$$f_\alpha(x) - f_\alpha(\ln(\alpha)) = f'_\alpha(c)(x-\ln(\alpha)),$$

d'où $|f_\alpha(x) - f_\alpha(\ln(\alpha))| = |f'_\alpha(c)||x-\ln(\alpha)|$.
Puisque $x \geqslant 1$ et $\ln(\alpha) > 1$, on a également $c > 1$ donc d'après la question précédente $|f'_\alpha(c)| \leqslant M$, d'où $|f'_\alpha(c)||x-\ln(\alpha)| \leqslant M|x-\ln(\alpha)|$.
Par ailleurs, d'après la question 5, $f_\alpha(\ln(\alpha)) = \ln(\alpha)$.
On obtient finalement

$$\boxed{\forall x \geqslant 1, |f_\alpha(x) - \ln(\alpha)| \leqslant M|x-\ln(\alpha)|.}$$

(c) D'après la question 10, pour tout $n > n_0, x_n \geqslant 1$ donc en appliquant la question précédente à x_n, obtient

$$\forall n > n_0, |f_\alpha(x_n) - \ln(\alpha)| \leqslant M|x_n - \ln(\alpha)|.$$

Or, pour tout $n > n_0, f_\alpha(x_n) = x_{n+1}$ donc

$$\boxed{\forall n > n_0, |x_{n+1} - \ln(\alpha)| \leqslant M|x_n - \ln(\alpha)|.}$$

(d) Montrons par récurrence que pour tout $n > n_0$, $|x_n - \ln(\alpha)| \leqslant M^{n-n_0-1}|x_{n_0+1} - \ln(\alpha)|$.

•Initialisation :

Pour $n = n_0+1$, on a $M^{n-n_0-1}|x_{n_0+1} - \ln(\alpha)| = M^0|x_{n_0+1} - \ln(\alpha)| \geqslant |x_{n_0+1} - \ln(\alpha)|$, ce qui prouve la propriété au rang n_0+1.

•Hérédité : Soit $n > n_0$ fixé. On suppose que $|x_n - \ln(\alpha)| \leqslant M^{n-n_0-1}|x_{n_0+1} - \ln(\alpha)|$. D'après la qustion précédente, on a alors

$$|x_{n+1} - \ln(\alpha)| \leqslant M|x_n - \ln(\alpha)| \leqslant M \times M^{n-n_0-1}|x_{n_0+1} - \ln(\alpha)| \leqslant M^{n-n_0}|x_{n_0+1} - \ln(\alpha)|,$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.

On a donc obtenu par récurrence que

$$\forall n > n_0, 0 \leqslant |x_n - \ln(\alpha)| \leqslant M^{n-n_0-1}|x_{n_0+1} - \ln(\alpha)|.$$

Puisque $M \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} M^{n-n_0-1} = 0$ donc par comparaison, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - \ln(\alpha)| = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ln(\alpha)$.

On en conclut que $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ln(\alpha).}$

Problème 2 : Suites de fonctions

1. (a)
```
def f(n,x):
    P=1
    for k in range(1,n+1):
        P=P*(1+x**k)
    return P
```

(b) Puisqu'on prend n assez grand, on peut supposer que $f_n(x)$ et $g_n(x)$ sont proches de $f(x)$ et $g(x)$ respectivement. Au vu de l'allure de la courbe, ce graphe permet de conjecturer que $\boxed{g(x) = \dfrac{1}{f(x)}.}$

(c) Soit $x \in [0,1[$.

• Soit $n \geqslant 1$.

Puisque pour tout $k \in [\![1,n]\!], 1 + x^k > 0$, $f_n(x) > 0$ donc on peut calculer

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1}(1+x^k)}{\prod_{k=1}^{n}(1+x^k)} = 1 + x^{n+1} \geqslant 1$$

car $x \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$, ce qui prouve que $\boxed{\text{la suite } (f_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ est croissante.}}$

• Soit $n \geqslant 1$.

Puisque pour tout $k \in [\![1,n]\!], 1 - x^{2k-1} > 0$ car $x \in [0,1[$, on a $g_n(x) > 0$ et on peut calculer

$$\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1}(1-x^{2k-1})}{\prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k-1})} = 1 - x^{2n+1} \leqslant 1$$

car $x \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$, ce qui prouve que $\boxed{\text{la suite } (g_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$

2. (a) Posons pour tout réel t, $u(t) = e^t - 1 - t$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel t :

$$u'(t) = e^t - 1.$$

Ainsi, $u'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^t - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0$.
On obtient le tableau de variation suivant pour u :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(t)$		$-$	0	$+$	
u	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Puisque la fonction u est décroissante sur $[-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$, elle admet un minimum en 0 donc pour tout réel $t, u(t) \geqslant 0$, ce qui prouve que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, 1 + t \leqslant e^t.}$$

(b) Soit $x \in [0, 1[$. Soit $n \geqslant 1$.
D'après la question précédente, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!], 1 \leqslant 1 + x^k \leqslant e^{x^k}$.
En multipliant les n égalités précédentes, on obtient

$$1 \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1 + x^k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{x^k}.$$

Or,

$$\prod_{k=1}^{n} e^{x^k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right).$$

On reconnaît la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$ et de premier terme x donc

$$\prod_{k=1}^{n} e^{x^k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) = \exp\left(x \times \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right) \leqslant \exp\left(\frac{x}{1 - x}\right)$$

par croissance de la fonction exponentielle.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 1, 1 \leqslant f_n(x) \leqslant \exp\left(\frac{x}{1 - x}\right)$.
La suite $(f_n(x))_{n \geqslant 1}$ est donc croissante et majorée par $\exp\left(\frac{x}{1 - x}\right)$. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit qu'elle converge, ce qui assure l'existence de $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ et par passage à la limite, on obtient

$$\boxed{\forall x \in [0, 1[, 1 \leqslant f(x) \leqslant \exp\left(\frac{x}{1 - x}\right).}$$

(c) Pour tout $n \geqslant 1, f_n(0) = \prod\limits_{k=1}^{n}(1 + 0^k) = 1$ donc $f(0) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 1$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to 0} \exp\left(\frac{x}{1 - x}\right) = e^0 = 1$.
En appliquant le théorème des gendarmes à l'inégalité trouvée en question précédente, on obtient $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$, ce qui assure que $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$

3. (a) On a remarqué en question 1.(c) que pour tout $x \in [0,1[$ et pour tout $n \geqslant 1, g_n(x) > 0$ et montré que la suite $(g_n(x))_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, la suite $(g_n(x))_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que pour tout $x \in [0,1[$, la suite $(g_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge, ce qui assure $\boxed{\text{l'existence de } g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x) \text{ pour tout } x \in [0,1[.}$

(b) Soit $t \in [0,1[$ fixé. La fonction $\varphi_t : u \mapsto u^t = e^{t\ln(u)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $u > 0$,

$$\varphi_t'(u) = tu^{t-1}.$$

Soit $x \in [0,1[$.

- Notons que l'inégalité est triviale si $x = 0$.
- On suppose dorénavant $x \in]0,1[$.

Alors $1 - x \in]0,1[$.

La fonction φ_t est continue sur $[1-x,1]$ et dérivable sur $]1-x,1[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]1-x,1[$ tel que

$$\varphi_t(1) - \varphi_t(1-x) = \varphi_t'(c)(1-(1-x)) = txc^{t-1}.$$

Puisque $0 < c < 1$ et $t - 1 < 0$, on a $c^{t-1} = e^{(t-1)\ln(c)} \geqslant 1$ car $(t-1)\ln(c) \geqslant 0$.

On en déduit que $\varphi_t(1) - \varphi_t(1-x) = 1-(1-x)^t \geqslant tx$.

Finalement, on a bien

$$\boxed{\forall t \in [0,1[, \forall x \in [0,1[, 1-(1-x)^t \geqslant tx.}$$

(c) Soit $x \in [0,1[$.

- Soit $n \geqslant 1$. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Appliquons l'inégalité de la question 2.(a) à $t = -x^{2k-1}$, on trouve

$$1 - x^{2k-1} \leqslant e^{-x^{2k-1}}.$$

En multipliant ces inégalités, on obtient

$$g_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k-1}) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{-x^{2k-1}} = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x^{2k-1}\right) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{n-1} x^{2k+1}\right).$$

Or, $\exp\left(-\sum_{k=0}^{n-1} x^{2k+1}\right) = \exp\left(-x\sum_{k=0}^{n-1}(x^2)^k\right)$ et puisque $x^2 \neq 1$, on reconnaît une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x^2 et de premier terme 1 donc

$$\exp\left(-x\sum_{k=0}^{n-1}(x^2)^k\right) = \exp\left(-x \times \frac{1-(x^2)^n}{1-x^2}\right).$$

Ainsi,pour tout $n \geqslant 1, g_n(x) \leqslant \exp\left(-x \times \dfrac{1-(x^2)^n}{1-x^2}\right)$.

Puisque $x^2 \in [0,1[$, $\lim_{n\to+\infty}(x^2)^n = 0$ donc on obtient par passage à la limite et par continuité de la fonction exponentielle que :

$$\boxed{\forall x \in [0,1[, g(x) \leqslant \exp\left(-\frac{x}{1-x^2}\right).}$$

• Soit $n \geqslant 1$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Suivons l'indication : posons $t = x^{2k-2} \in [0, 1[$. D'après la question précédente, on a alors

$$1-(1-x)^{x^{2k-2}} \geqslant x^{2k-1} \quad \text{donc} \quad 1-x^{2k-1} \geqslant (1-x)^{x^{2k-2}}.$$

En multipliant ces n inégalités, on obtient

$$g_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k-1}) \geqslant \prod_{k=1}^{n}(1-x)^{x^{2k-2}} = (1-x)^{\sum_{k=1}^{n} x^{2k-2}} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}(x^2)^{k-1}\ln(1-x)\right)$$

ce qui est licite car $1-x>0$.
En effectuant le changement d'indice $i = k-1$, on obtient

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n}(x^2)^{k-1}\ln(1-x)\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1}(x^2)^{k}\ln(1-x)\right).$$

Puisque $x \in [0,1[, x^2 \in [0,1[$. On reconnaît alors une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x^2 et de premier terme 1 donc on trouve

$$\exp\left(\sum_{k=0}^{n-1}(x^2)^{k}\ln(1-x)\right) = \exp\left(\frac{1-(x^2)^n}{1-x^2}\ln(1-x)\right).$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1, g_n(x) \geqslant \exp\left(\dfrac{1-(x^2)^n}{1-x^2}\ln(1-x)\right)$.
Puisque $x^2 \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(x^2)^n = 0$ donc on obtient par passage à la limite et par continuité de la fonction exponentielle que :

$$\boxed{\forall x \in [0,1[, g(x) \geqslant \exp\left(\frac{\ln(1-x)}{1-x^2}\right).}$$

(d) • On a $g(0) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} 1 = 1$.

• Par ailleurs, par continuité de la fonction exponentielle, on a

$$\lim_{x\to 0}\exp\left(-\frac{x}{1-x^2}\right) = e^0 = 1.$$

• Enfin, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{1-x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x) = 1$ donc par compositon de limites, on obtient

$$\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln(x)}{1-x^2}\right) = 1.$$

En utilisant la double inégalité montrée dans la question précédente et le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1 = g(0)$, ce qui assure que $\boxed{g \text{ est continue en } 0.}$

4. (a) Soit $x \in [0,1[$. Soit $n \geqslant 1$.

On a

$$\begin{aligned}
f_{2n}(x)g_n(x) &= \prod_{k=1}^{2n}(1+x^k)\prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k-1})\\
&= \prod_{k=1}^{n}(1+x^{2k})\prod_{k=1}^{n}(1+x^{2k-1})\prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k-1})\\
&= \prod_{k=1}^{n}(1+(x^2)^k)\prod_{k=1}^{n}(1+x^{2k-1})(1-x^{2k-1})\\
&= f_n(x)^2\prod_{k=1}^{n}(1-(x^{2k-1})^2)\\
&= f_n(x^2)\prod_{k=1}^{n}(1-(x^2)^{2k-1})\\
&= f_n(x^2)g_n(x^2).
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1[, \text{pour tout } n \geqslant 1, f_n(x^2)g_n(x^2) = f_{2n}(x)g_n(x).}$
Pour tout $x \in [0,1[, x^2 \in [0,1[$ donc d'après les questions 2.(b) et 3.(a),

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x^2)g_n(x^2) = f(x^2)g(x^2) = h(x^2).$$

Par ailleurs, pour tout $x \in [0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_{2n}(x) = f(x)$ et on a également $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = g(x)$.
Par produit de limites, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} f_{2n}(x)g_n(x) = f(x)g(x) = h(x).$$

Par unicité de la limite, il en découle que

$$\boxed{\forall x \in [0,1[, h(x^2) = h(x).}$$

(b) Soit $x \in [0,1[$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1, h(x^{2^n}) = h(x)$.
•**Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $h(x^{2^n}) = h(x^2) = h(x)$ d'après la question précédente, ce qui prouve la propriété au rang $n = 1$.
•**Hérédité :** Soit $n \geqslant 1$ tel que $h(x^{2^n}) = h(x^2) = h(x)$.
Montrons que $h(x^{2^{n+1}}) = h(x^2) = h(x)$.
D'après la question précédente, puisque $x^{2^n} \in [0,1[$, on a

$$h(x^{2^{n+1}}) = h(x^{2^n\times 2}) = h((x^{2^n})^2) = h(x^{2^n}).$$

Or, par hypothèse de récurrence, $h(x^{2^n}) = h(x)$ donc $h(x^{2^{n+1}}) = h(x)$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.
On a bien montré que $\boxed{\text{pour tout n } \geqslant 1, h(x^{2^n}) = h(x).}$

(c) Soit $x \in [0,1[$.
Pour tout $n \geqslant 1, h(x) = h(x^{2^n})$.
• Si $x = 0, h(x) = h(0) = f(0)g(0) = 1 \times 1 = 1$.

• Supposons que $x \in]0,1[$.
Alors pour tout $n \geqslant 1, x^{2^n} = \exp(2^n \ln(x))$.
Puisque $x \in]0,1[, \ln(x) < 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} 2^n \ln(x) = -\infty$. Or, $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ donc par composition de limites, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} x^{2^n} = \lim_{n \to +\infty} \exp(2^n \ln(x)) = 0.$$

Par définition, pour tout $x \in [0,1[, h(x) = f(x)g(x)$ et f et g sont continues en 0 (questions 2.(c) et 3.(d)) donc h est continue en 0 comme produit de fonctions continues.
On en déduit que, pour tout $x \in]0,1[$,

$$h(x) = \lim_{n \to +\infty} h(x^{2^n}) = h(0) = 1.$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1[, h(x) = 1}$, c'est à dire,

$$\forall x \in [0,1[, g(x) = \frac{1}{f(x)},$$

ce qui prouve la conjecture faite en question 1.(b).