
DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°6
Samedi 15 mars 2025 (4h00)

L'énoncé est constitué d'un exercice, deux problèmes et comporte 5 pages.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, la précision et la concision de la rédaction. Le soin de la copie ainsi que l'orthographe entreront également pour une part importante dans l'appréciation du travail rendu.

Les résultats doivent être encadrés.

Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les calculatrices sont interdites.

Les questions d'informatique, à rendre sur une copie séparée, sont les suivantes :

Exercice 1 : question 4.(e)

Problème 1 : question 2

Problème 2 : questions 1.(a) et 1.(b)

Exercice 1 : Une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2

On note $I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$. Soit f la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, f(x) = (\pi - x) \cos(x) + \ln(\sin(x)) \sin(x).$$

- (a) Vérifier que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E) suivante sur I :

$$(E) : \forall x \in I, y''(x) + y(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

- (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I .
- Montrer que f est prolongeable par continuité en π .
- Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
- (a) Justifier que pour tout $x \in I, f(x) \leq 0$.
(b) En déduire que $\forall x \in I, f''(x) \geq \frac{1}{\sin(x)}$.
(c) En déduire les variations de f' sur I .
(d) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
(e) Ecrire une fonction Python `derivee_f(x)` qui prend un réel x dans $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ et qui renvoie la valeur de $f'(x)$ puis écrire un programme permettant de trouver une approximation de α à 10^{-3} près en utilisant un raisonnement par dichotomie (on suppose toutes les fonctions nécessaires importées par la commande `from math import *` et on pourra attribuer à $f'(\pi)$ une valeur strictement positive quelconque, par exemple $f'(\pi) = 1$.)
(f) Montrer que $f(\alpha) = \frac{\pi - \alpha}{\cos(\alpha)}$.
(g) Dresser le tableau de variations de f .

Problème 1 : Une population de saumons

On s'intéresse à l'évolution d'une population de saumons au fil des ans. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note y_n le nombre de saumons de l'année n . Selon un modèle d'évolution de la population, on a l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = y_n e^{r(1 - \frac{y_n}{p})}$$

où p représente la capacité limite du milieu ($p > 0$) et r est le taux de croissance intrinsèque de la population ($r > 0$).

- Montrer qu'en posant $b = \frac{r}{p}, \alpha = e^r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = by_n$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \alpha x_n e^{-x_n}.$$

Quel est le comportement de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $x_0 = 0$?

Dans toute la suite, on suppose que $x_0 > 0$.

2. Ecrire une fonction Python `suiteX(n,alpha,x0)` qui prend en entrée un entier naturel n ainsi que les valeurs de α et de x_0 et qui renvoie la liste $[x_0, \dots, x_n]$ des $n + 1$ premières valeurs de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On suppose que la fonction exponentielle `exp` a été importée à partir du module `math`.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n > 0$.

On définit la fonction f_α sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_\alpha(x) = \alpha x e^{-x}.$$

4. En posant pour tout $x \in \mathbb{R}_+, g_\alpha(x) = f_\alpha(x) - x$, étudier le signe de g_α sur $\mathbb{R}_+$.
5. Déterminer le ou les points fixes de f_α .

Dans toute la suite, on suppose que $\alpha \in]e, e^2[$.

6. Dresser le tableau de variations de la fonction f_α sur $\mathbb{R}_+$. On montrera notamment que f_α admet un maximum en $x = 1$.
7. Montrer que l'équation $f_\alpha(x) = 1$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}_+$. On notera λ_α la solution dans $[0, 1[$ et μ_α celle dans $]1, +\infty[$.
8. (a) Vérifier que $f_\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right) = e^{2\ln(\alpha)-1-\frac{\alpha}{e}}$.
(b) Etudier les variations de la fonction $h : x \mapsto 2\ln(x) - 1 - \frac{x}{e}$ sur $]e, e^2[$ et en déduire que pour tout $x \in]e, e^2[, h(x) > 0$.
(c) En déduire que $f_\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right) > 1$ puis que $\frac{\alpha}{e} \in]1, \mu_\alpha[$.
(d) Montrer que $f_\alpha([\lambda_\alpha, \mu_\alpha]) \subset [1, \mu_\alpha]$ puis que $f_\alpha([1, \mu_\alpha]) \subset [1, \mu_\alpha]$.
9. On souhaite montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.
On procède par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in [0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$.
(a) Montrer alors que pour tout $n \geq 1, x_n \in [0, 1]$.
(b) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
(c) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge et aboutir à une contradiction.
10. Montrer que pour tout $n > n_0, x_n \in [1, \mu_\alpha]$.
11. (a) Etudier les variations de f'_α et en déduire qu'il existe un réel $M \in [0, 1[$ tel que pour tout réel $x \in [1, +\infty[, |f'_\alpha(x)| \leq M$.
(b) A l'aide du théorème des accroissements finis, établir que

$$\forall x \geq 1, |f_\alpha(x) - \ln(\alpha)| \leq M|x - \ln(\alpha)|.$$

- (c) Montrer que pour tout $n > n_0, |x_{n+1} - \ln(\alpha)| \leq M|x_n - \ln(\alpha)|$.
(d) En conclure que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Problème 2 : Suites de fonctions

Soit x un réel de l'intervalle $[0, 1[$.

On définit les suites $(f_n(x))_{n \geq 1}, (g_n(x))_{n \geq 1}$ et $(h_n(x))_{n \geq 1}$ par :

$$\forall n \geq 1, f_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + x^k), \quad g_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - x^{2k-1}) \quad \text{et} \quad h_n(x) = f_n(x)g_n(x).$$

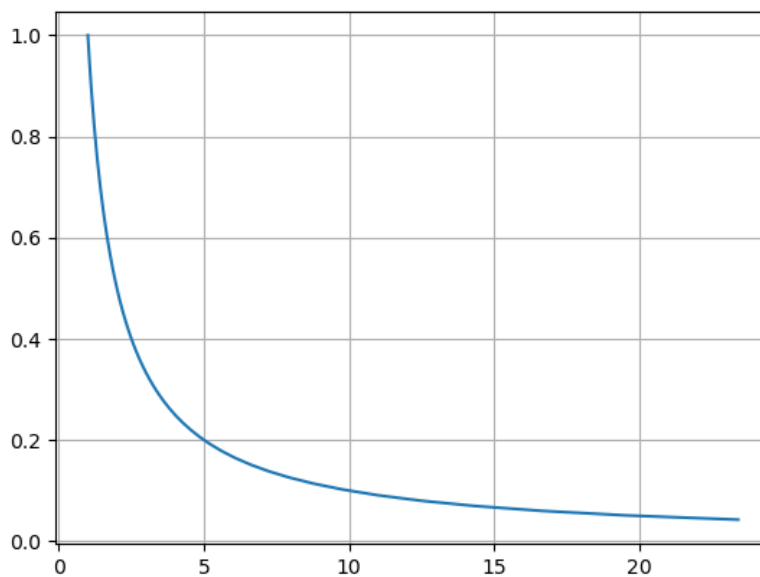
On pose, sous réserve d'existence,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x), \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) \quad \text{et} \quad h(x) = f(x)g(x).$$

1. (a) Ecrire une fonction Python $f(n, x)$ qui renvoie la valeur de $f_n(x)$.
- (b) On suppose que l'on dispose également d'une fonction $g(n, x)$ qui renvoie la valeur de $g_n(x)$.

On exécute alors le script suivant, et on obtient le graphe ci-dessous :

```
from matplotlib import pyplot as plt
n=100
Lx=[f(n,k/100) for k in range(80)]
Ly=[g(n,k/100) for k in range (80)]
plt.plot(Lx,Ly)
plt.grid()
plt.show()
```



Quelle relation simple entre $f(x)$ et $g(x)$ ce graphe permet-il de conjecturer ?

- (c) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante et que la suite $(g_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante.
2. (a) Etablir que pour tout réel t , $1 + t \leq e^t$.
- (b) En déduire que $f(x)$ existe pour tout $x \in [0, 1[$ et que

$$\forall x \in [0, 1[, 1 \leq f(x) \leq \exp\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

- (c) Montrer que f est continue en 0.
3. (a) Justifier l'existence de $g(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.
- (b) Soit $t \in [0, 1[$. En appliquant le théorème des accroissements finis à $\varphi_t : u \mapsto u^t$, montrer que

$$\forall x \in [0, 1[, 1 - (1-x)^t \geq tx.$$

- (c) En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\exp\left(\frac{\ln(1-x)}{1-x^2}\right) \leq g(x) \leq \exp\left(-\frac{x}{1-x^2}\right).$$

Indication : pour l'inégalité de gauche, on pourra appliquer la question précédente avec $t = x^{2k-2}$.

- (d) En déduire que g est continue en 0.
4. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, pour tout $n \geq 1$, $f_n(x^2)g_n(x^2) = f_{2n}(x)g_n(x)$.
En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$, $h(x^2) = h(x)$.
- (b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, pour tout $n \geq 1$, on a $h(x^{2^n}) = h(x)$.
- (c) En déduire la valeur de $h(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$ et faire le lien avec la conjecture faite en question 1.(b).