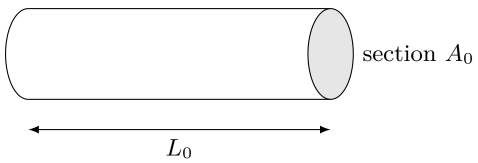
Devoir en temps libre n° 18

Élasticité d'un os

On modélise un os au repos, par exemple un fémur, par une barre cylindrique, de section A_0 et de longueur L_0 au repos. On exerce sur l'os une force de traction ou de compression parallèlement à son axe. On appelle $\Delta L = L - L_0$ la variation de longueur observée.

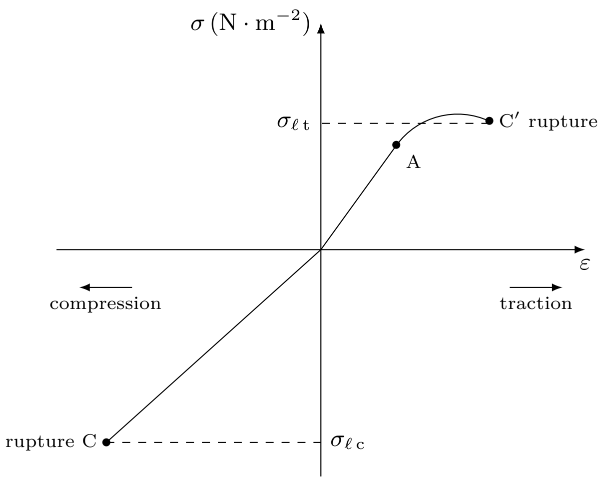


(a) os au repos

(b) os en traction

1. Donner une explication qualitative et succincte au fait que l'os en traction soit plus fin que l'os au repos.
2. Représenter schématiquement l'os en compression, et la force exercée.

La courbe ci-dessous donne le résultat expérimental de la contrainte appliquée $\sigma = F/A$ en fonction de la déformation de l'os $\varepsilon = \Delta L/L_0$.



On donne les modules de Young E_t et E_c, et les limites de résistance $\sigma_{\ell\,\mathrm{t}}$ et $\sigma_{\ell\,\mathrm{c}}$ dans le cas de la traction et de la compression.

	$E\,(\mathrm{N\cdot m^{-2}})$	$\sigma_\ell\,(\mathrm{N\cdot m^{-2}})$
traction	$1{,}6\cdot 10^{10}$	$12\cdot 10^{7}$
compression	$0{,}9\cdot 10^{10}$	$17\cdot 10^{7}$

3. Dans quelle zone l'os présente-t-il une élasticité linéaire ? Comparer la réponse de l'os en traction et en compression.
4. Que vaut la variation de longueur d'un fémur de longueur 0,4 m et de section $1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2}$ lorsqu'il supporte la moitié du poids d'une personne de 65 kg ?
5. Dans l'hypothèse d'une élasticité parfaite jusqu'à la rupture, que vaut la variation de longueur de cet os correspondant à la rupture ? Au-delà de quelle masse une personne risque-t-elle une fracture de son fémur ?

Corrigé du devoir en temps libre n° 18

éléments de correction

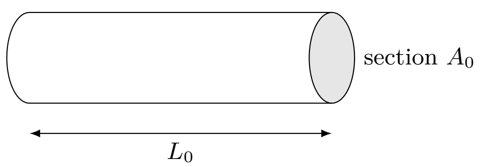
Remarque préliminaire sur la courbe. La déformation ε est positive dans le cas de la traction, et négative dans le cas de la compression. La contrainte σ est le rapport de la norme de la force appliquée divisée par la section, ce qui est une grandeur positive. La partie de la courbe en compression est donc une convention pour ce qui concerne le signe de σ.

1. Lors de la déformation de l'os, sa masse ne change pas et par conséquent son volume reste constant, car sa masse volumique est constante (la nature du matériau constitutif de l'os ne change pas). Si on assimile l'os à un cylindre de longueur L_0 et de section A_0 au repos, et que sa longueur augmente jusqu'à L pour une section A, la conservation du volume s'écrit :

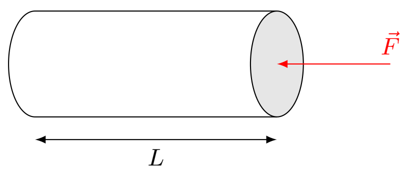
$$V = A_0 \times L_0 = A \times L \Rightarrow A = A_0 \times \underbrace{\frac{L_0}{L}}_{<1} < A_0$$

L'os s'amincit donc lorsqu'il est en extension.

2. En compression, on exerce sur les extrémités de l'os une force dirigée vers son centre. Par un argument symétrique du précédent, l'os s'épaissit.



(c) os au repos



(d) os en compression

3. L'os présente une élasticité linéaire entre les points C et A. La comparaison entre traction et compression comporte deux aspects. D'une part, pour une force appliquée identique, l'os se déforme davantage en compression qu'en traction. En effet, l'allongement relatif s'écrit :

$$\sigma = E \times \varepsilon \Rightarrow \frac{F}{A} = E \times \frac{|\Delta L|}{L_0} \Rightarrow |\Delta L| = \frac{L_0}{E} \times \frac{F}{A}$$

Pour une force exercée F identique exercée sur la même section A de l'os, ΔL est d'autant plus grand que le module d'Young est petit. Le module d'Young en compression étant plus faible que le module d'Young en traction, la déformation est plus grande en compression qu'en traction.

D'autre part, on peut s'intéresser à la déformation maximale que l'os peut subir. On constate sur la figure que ε est plus grand au point C (limite de déformation en compression) qu'au point A (limite de déformation en traction). En supposant que l'os reste fonctionnel uniquement dans son domaine d'élasticité linéaire, il peut subir un raccourcissement relatif plus grand qu'un allongement relatif.

4. Lorsqu'un fémur supporte le poids d'une personne, il est en compression. La force qu'il subit est la moitié du poids de la personne de masse m, soit $mg/2$. Déterminons la variation de longueur :

$$\sigma = E \times \varepsilon \Rightarrow |\Delta L| = \frac{L_0}{E_\text{c}} \times \frac{mg}{2A} = \frac{0,4}{0{,}9 \cdot 10^{10}} \times \frac{65 \times 9,8}{2 \times 1 \cdot 10^{-3}} = 1{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{m}$$

La longueur de l'os diminue donc de 14 µm.

5. Le raisonnement est identique, mais il faut considérer la contrainte de rupture en compression $\sigma_{\ell\,\text{c}}$:

$$\sigma_{\ell\,\mathrm{c}} = E_\mathrm{c} \times \frac{|\Delta L_\mathrm{max}|}{L_0} \Rightarrow |\Delta L_\mathrm{max}| = \frac{L_0}{E_\mathrm{c}} \times \sigma_{\ell\,\mathrm{c}} = \frac{0,4}{0,9 \cdot 10^{10}} \times 17 \cdot 10^7 = 7,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

L'os peut donc se comprimer au maximum de 7,5 mm, ce qui correspond à un ordre de grandeur du centimètre ! C'est donc bien plus élastique que ce qu'on pourrait croire.

Déterminons la masse correspondant à la contrainte maximale en compression, sachant qu'un fémur ne supporte que la moitié de la masse :

$$\sigma_{\ell\,\mathrm{c}} = \frac{F}{A} = \frac{mg}{2A} \Rightarrow m = \frac{2A}{g} \times \sigma_{\ell\,\mathrm{c}} = \frac{2 \times 1 \cdot 10^{-3}}{9,8} \times 17 \cdot 10^7 = 35 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$$

Bien entendu, lors de la marche, lorsqu'un pied est en l'air, le poids total de la personne s'applique sur un seul fémur. La masse totale supportée est alors deux fois moindre : $17,5 \cdot 10^3$ kg. Il s'agit d'une masse considérable (environ 17 tonnes). L'os est donc un matériau très résistant. Cela justifie la possibilité d'observer des animaux terrestres très gros (un tyrannosaure supportait ses 8 à 9 tonnes sur deux pattes).

Cependant, cela ne signifie pas que les os puissent supporter longtemps de telles masses. D'une part, que l'os puisse subir des compressions importantes sans rupture ne signifie pas que cela soit indolore ! D'autre part, à chaque pas, l'os effectue un cycle compression – décompression, qui le ramène à son état initial tant que l'élasticité de l'os est préservée. Or tout matériau voit son élasticité diminuer au-delà d'un certain nombre de cycles de déformation ; en effet, il subit à chaque cycle des micromodifications irréversibles de sa structure (microfractures), dont l'importance s'amplifie jusqu'à la rupture. C'est la raison pour laquelle on n'observe pas d'animaux terrestres ayant une masse supérieure à quelques tonnes.