

Devoir en temps libre n° 20

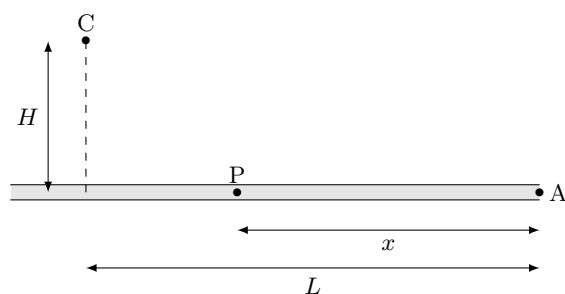
Optimisation d'un trajet

Jeannot Lapin se trouve initialement au point A et s'engage sur un chemin rectiligne sur lequel il trotte à la vitesse v_1 . Dans le champ à sa droite se trouve un énorme chou C situé à une distance H du chemin. Dans la terre molle du champ, ses pattes s'enfoncent, et Jeannot circule à la vitesse v_2 .

1. Déterminer la position du point P auquel Jeannot doit quitter le chemin et entrer dans le champ, pour que son temps de trajet soit minimum.

On établira une ou plusieurs expressions littérales, puis on pourra procéder à une résolution mathématique explicite, une résolution graphique (bien expliquer ce qu'on trace), ou une résolution numérique avec un programme Python.

2. Question subsidiaire : à quel phénomène optique cette situation est-elle équivalente ?



Données

$$L = 300 \text{ m}$$

$$H = 40 \text{ m}$$

$$v_1 = 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$v_2 = 12 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Devoir en temps libre n° 20

éléments de correction

1. Soit x la distance entre le point de départ de Jeannot et le point où il quitte le chemin, soit $x = AP$; la durée de ce trajet fait à la vitesse v_1 est : $t_1 = x/v_1$. Par application du théoème de Pythagore, la longueur du trajet dans le champ est alors : $PC = \sqrt{H^2 + (L-x)^2}$; la durée de ce trajet est $t_2 = \sqrt{H^2 + (L-x)^2}/v_2$. En définitive, la durée totale que met Jeannot à atteindre son chou en fonction de x est :

$$t_{(x)} = \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{H^2 + (L-x)^2}}{v_2}$$

Le point x qui permet le trajet le plus court en temps correspond au minimum de la fonction $t_{(x)}$. Il faut donc dériver la fonction $t_{(x)}$ par rapport à la variable x :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} + \frac{-2(L-x)}{2v_2\sqrt{H^2 + (L-x)^2}} = \frac{1}{v_1} - \frac{(L-x)}{v_2\sqrt{H^2 + (L-x)^2}}$$

L'annulation de cette expression correspond à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} &= \frac{2(L-x)}{2v_2\sqrt{H^2 + (L-x)^2}} \Rightarrow \frac{1}{v_1^2} = \frac{(L-x)^2}{v_2^2[H^2 + (L-x)^2]} \\ &\Rightarrow \frac{H^2 + (L-x)^2}{(L-x)^2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} \Rightarrow \frac{H^2}{(L-x)^2} + 1 = \frac{v_1^2}{v_2^2} \\ &\Rightarrow \frac{H^2}{(L-x)^2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} - 1 \Rightarrow (L-x)^2 = \frac{H^2}{\frac{v_1^2}{v_2^2} - 1} \end{aligned}$$

On en déduit la position x correspondant au trajet de temps extremal¹ :

$$L-x = \frac{H}{\sqrt{\frac{v_1^2}{v_2^2} - 1}} \Rightarrow x = L - \frac{H}{\sqrt{\frac{v_1^2}{v_2^2} - 1}} = 270 \text{ m}$$

À ce stade, on a identifié un extremum ; il faut montrer qu'il s'agit d'un minimum. Comparons les durées de parcours pour $x = 270 \text{ m}$, $x = 0$ (Jeannot quitte le chemin en A) et $x = L$ (Jeannot quitte le chemin au point K où celui-ci est le plus proche de C).

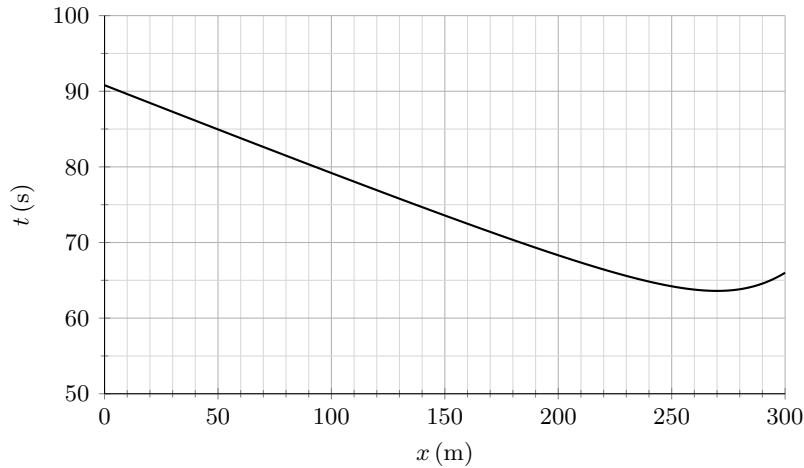
x	0 m	270 m	300 m
$t_{(x)} = \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{H^2 + (L-x)^2}}{v_2}$	0,025 h = 90 s	0,0177 h = 64 s	0,0183 h = 66 s

Comme la fonction $t_{(x)}$ est continue et qu'elle n'admet qu'un seul extremum ayant un sens physique, cela montre que cet extremum est bien un minimum. Jeannot atteint son chou en un temps minimum de 0,0177 h = 64 s. Bien joué ! Avec une telle rapidité, le chou n'a certainement pas le temps de s'enfuir !

On peut faire une résolution graphique en traçant numériquement la fonction $t_{(x)}$ pour $0 \leq x \leq 300$:

$$t_{(x)} = \frac{x}{20 \cdot 10^3/3,6} + \frac{\sqrt{40^2 + (300-x)^2}}{12 \cdot 10^3/3,6}$$

1. L'autre solution $L-x = -\frac{H}{\sqrt{v_1^2/v_2^2 - 1}}$ n'a pas de sens physique car $L-x$ est une longueur nécessairement positive.

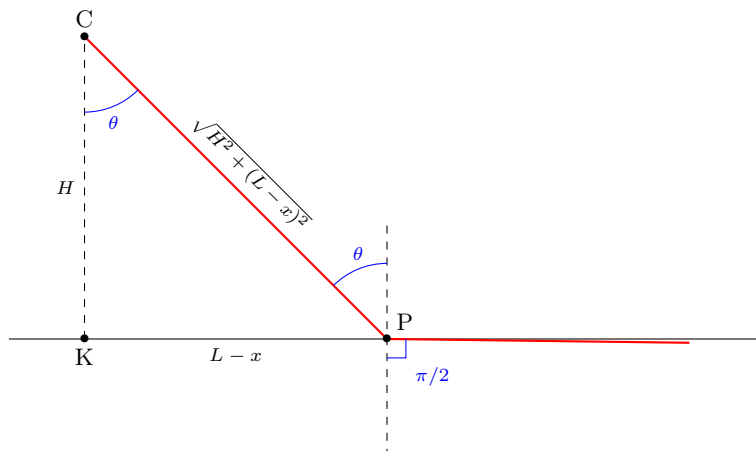


La courbe montre un minimum vers 270 m correspondant à une durée de parcours autour de 64 s.

2. Reprenons la condition de la durée de parcours minimale :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} + \frac{-2(L-x)}{2v_2 \sqrt{H^2 + (L-x)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} \times \frac{L-x}{\sqrt{H^2 + (L-x)^2}}$$

Introduisons l'angle entre le parcours sur le chemin et la normale ($\pi/2$), et l'angle θ entre le parcours dans le champ, au point où Jeannot « se réfracte » du chemin vers le champ.



Le terme $(L-x)/\sqrt{H^2 + (L-x)^2}$ correspond au rapport du côté opposé à θ à l'hypothénuse dans le triangle (HPC) rectangle en H. La condition de temps minimal s'écrit donc :

$$\frac{\sin(\pi/2)}{v_1} = \frac{\sin \theta}{v_2}$$

ce qui correspond à la loi de Snell-Descartes de la réfraction dans la situation de l'angle limite de réfraction². Il est logique que le calcul mène à la loi de la réfraction, car le trajet parcouru par la lumière est le plus court en temps en vertu du principe de Fermat, ce qui revient bien à chercher le parcours de durée minimale.

2. On rappelle que l'indice optique est le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide sur la vitesse de la lumière dans un milieu matériel.