ONDES ET SIGNAUX

4 – Circuits électriques en régime transitoire

Plan du chapitre

Programme officiel – Deuxième semestre – **Thème S – ondes et signaux**

Notions	Capacités exigibles
S.3. Dynamique d'un circuit électrique du premier ordre	
Système à comportement capacitif : modèle du condensateur idéal. Relation entre charge et tension électrique, entre intensité du courant électrique et tension électrique ; capacité d'un condensateur.	Exploiter l'expression fournie de la capacité d'un condensateur.
Continuité de la tension électrique aux bornes d'un condensateur.	Exploiter la condition de continuité de la tension électrique aux bornes d'un condensateur pour déterminer les conditions initiales dans un circuit.
Énergie stockée dans un condensateur.	
Modèle du circuit RC série alimenté par une source idéale de tension.	Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur.
Charge d'un condensateur par une source de tension constante, décharge d'un condensateur, temps caractéristique.	Établir l'expression, en fonction du temps, de la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge et de sa décharge. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. **Réaliser l'acquisition d'un signal électrique caractéristique d'un système du premier ordre et en étudier les caractéristiques.**
Stockage et dissipation de l'énergie.	Réaliser un bilan énergétique pour le circuit RC série.

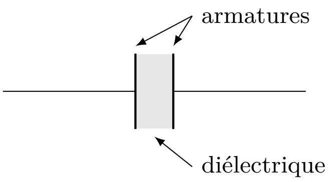
1 Les condensateurs

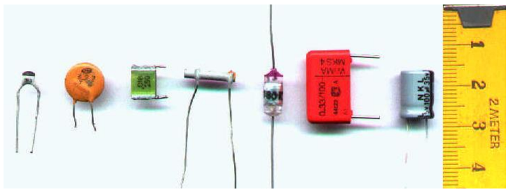
1.1 Présentation du dipôle

1.1.1 Description de l'objet

Description d'un condensateur

Un condensateur est constitué de deux plaques conductrices de l'électricité (les armatures) séparées par un isolant électrique (le diélectrique).
Chacune des armatures constitue une borne du condensateur, qui est donc un dipôle.





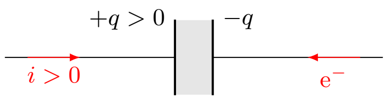
Les armatures sont généralement planes, mais il en existe des cylindriques, coniques, sphériques, etc, et usuellement parallèles entre elles.

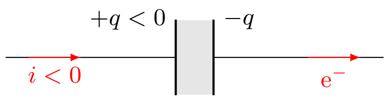
1.1.2 Charge des armatures

Si on fait circuler des électrons vers l'armature de droite (soit $i > 0$ dans l'autre sens) :

- ceux-ci s'accumulent sur l'armature de droite ;
- l'armature de droite se charge négativement ;
- cela entraine un départ d'électrons de l'armature opposée ;
- l'armature de gauche se charge positivement.

Par conservation de la charge, les charges sur les deux armatures sont exactement opposées.





Apparition d'une charge sous l'effet d'un courant

Un condensateur dans une branche où circule un courant d'intensité i voit ses armatures se charger d'une charge $+q$ et $-q$.

Signe de la charge des armature

Si on appelle $+q$ la charge sur l'armature où arrive le courant, alors i et q ont le même signe.

Lorsque la charge des armatures augmente :

- que dire de la possibilité d'arrivée d'électrons supplémentaires sur l'armature négative ?
- que dire de l'intensité du courant électrique qui alimente le condensateur ?

Charge maximale d'un condensateur

Il existe une charge maximale pouvant se trouver sur les armatures du condensateur (dans des conditions de charge données).

Comportement d'un condensateur complètement chargé

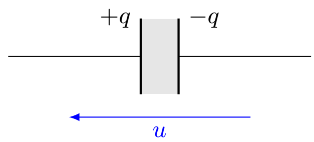
Un condensateur entièrement chargé se comporte comme un interrupteur ouvert : l'intensité est nulle dans sa branche.

1.2 Relation entre charge, courant et tension dans un condensateur

1.2.1 Tension aux bornes d'un condensateur idéal ; capacité

Tension aux bornes d'un condensateur

On admet que :



$$\boxed{\text{En convention récepteur,} \quad u = \frac{q}{C}}$$

avec C la **capacité** du condensateur en **farad** F.

En convention générateur : $u = -\dfrac{q}{C}$.

Capacité du condensateur

La capacité d'un condensateur ayant des armatures planes de surface S et parallèles séparées de e est :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \times S}{e}$$

avec ε_0 la permittivité du vide (constante universelle) et ε_r la permittivité relative du diélectrique situé entre les armatures (nombre sans dimension tel que $\varepsilon_r \geq 1$).

Calcul d'une capacité

Soit un condensateur plan ayant des armatures de surface $1\,\text{cm}^2$ distantes de $e = 1\,\text{mm}$ et séparées par un diélectrique en porcelaine de permittivité relative $\varepsilon_r = 5$. Calculer la capacité, sachant que $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$.

Application 1 : augmenter la capacité d'un condensateur

Quelle est l'influence de chacun des paramètres sur la capacité d'un condensateur ? En déduire sur quoi il faut jouer pour avoir des condensateurs de grande capacité mais de taille aussi petite que possible.

On veut un condensateur de capacité $1\,\text{mF}$ fait avec des armatures séparées par de la bakélite ($\varepsilon_r \approx 10$) de $5\,\text{mm}$ dépaisseur ; calculer la surface que doivent avoir les armatures.
Même question si le diélectrique est du titanate de baryum ($\varepsilon_r \approx 1200$).

1.2.2 Relation entre tension et intensité

Relation entre i et la charge accumulée dans un condensateur

Si q est la charge portée par l'armature du condensateur, alors l'intensité du courant qui circule dans la branche du condensateur est :

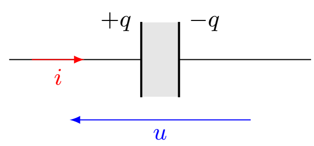
$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Démonstration (à connaitre)

Relation entre tension et intensité au niveau d'un condensateur

Si u est la tension aux bornes du condensateur et i l'intensité dans la branche du condensateur, alors :

$$\boxed{\text{En convention récepteur,} \quad i = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$$



En convention générateur : $i = -C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

Démonstration (à connaitre)

Cas du régime stationnaire (régime continu)

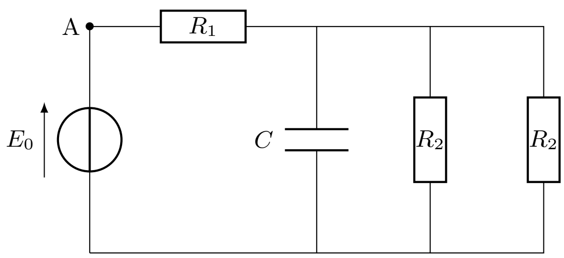
En régime continu (stationnaire), un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

Démonstration (à connaitre)

Exemple d'application

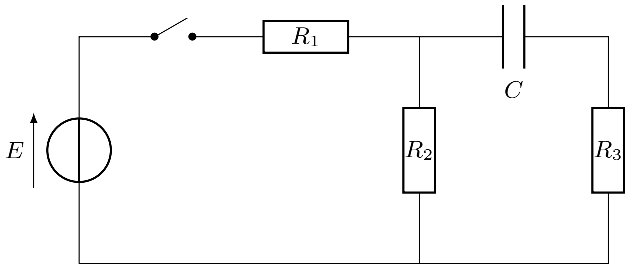
Quelle est la tension u aux bornes du condensateur lorsque le régime stationnaire est atteint dans le circuit ?

On débranche la source de tension en déconnectant le circuit au niveau du point A. Quelle est la tension u aux bornes du condensateur lorsque le circuit parvient en régime stationnaire ?



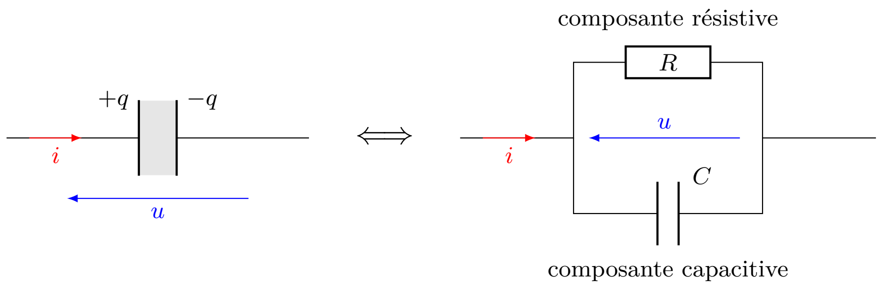
Application 2 : tension aux bornes d'un condensateur en régime stationnaire

Déterminer la tension aux bornes du condensateur en régime stationnaire dans le circuit ci-dessous. Même question après basculement de l'interrupteur en position fermée.



1.2.3 Modélisation d'un condensateur réel

- Approximation du condensateur idéal : le diélectrique est parfaitement isolant et aucun courant ne traverse le condensateur d'une armature à l'autre. Les condensateurs réels sont proches de l'idéalité.
- Condensateur réel : un (très) petit courant traverse le condensateur, modélisé par une (très) grande résistance en parallèle.

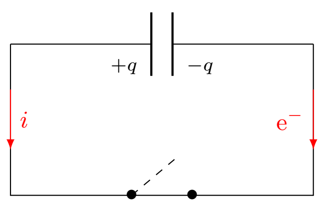


1.2.4 Analogie avec le transfert thermique

transport	cause	flux	résistance	stockage
charges	$u = \Delta V$	i	R	condensateur capacité C
transfert thermique	ΔT	$\mathcal{P}_{\text{th}}$	R_{th}	capacité thermique C

1.3 Énergie emmagasinée dans un condensateur

- Si on relie les deux bornes d'un condensateur chargé, les électrons circulent spontanément de l'armature ⊖ vers l'armature ⊕.
- Un condensateur chargé peut induire un mouvement ordonné d'électrons, donc un travail.
- Un condensateur stocke l'énergie électrique qu'il reçoit lorsqu'on le charge.



Énergie stockée dans un condensateur

L'énergie stockée dans un condensateur portant une charge $\pm q$ sur ses armatures et ayant une tension u à ses bornes est :

$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}\,Cu^2}$$

Démonstration (à connaitre)

Énergie stockée dans un condensateur

Un condensateur de capacité $C = 330\,\mathrm{pF}$ est chargé jusqu'à présenter à ses bornes une tension $u = 2{,}0\,\mathrm{V}$. Calculer la charge portée par chaque armature et l'énergie stockée dans le condensateur.

Application 3 : énergie stockée dans un supercondensateur

Les supercondensateurs sont des dispositifs qui se comportent comme des condensateurs, mais qui peuvent avoir des capacités très importantes tout en gardant une taille réduite. Actuellement, un supsercondensateur peut présenter une tension maximale à ses bornes de $2{,}7\,\mathrm{V}$ pour une capacité de $1{,}5\,\mathrm{F}$. Calculer la charge stockée sur les armatures et l'énergie maximale emmagasinée.

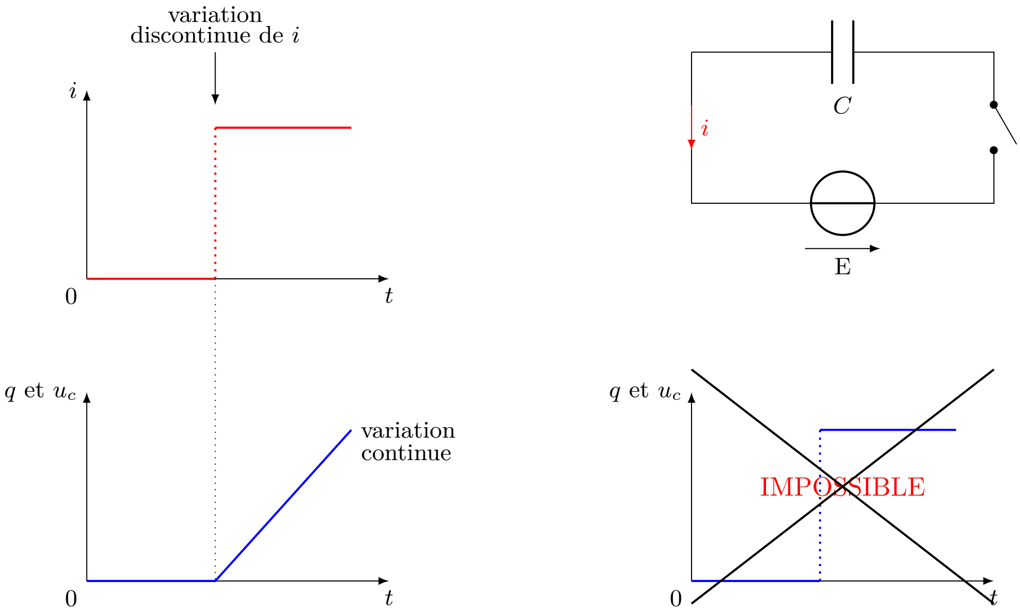
1.4 Continuité de la charge et de la tension

Continuité de q et u aux bornes d'un condensateur

Toute discontinuité de la charge q d'un condensateur, donc de la tension u à ses bornes, est impossible. La charge q des armatures et de la tension u aux bornes du condensateur varient de façon continue : les fonctions $q_{(t)}$ et $u_{(t)}$ sont continues au sens mathématique.

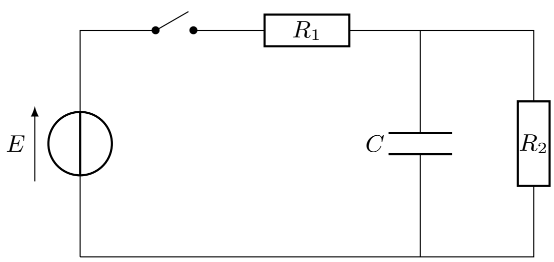
Démonstration (à connaitre)

L'intensité qui alimente le condensateur peut en revanche varier de façon discontinue, par exemple suite à la fermeture d'un interrupteur.



Application 4 : continuité de grandeurs électriques

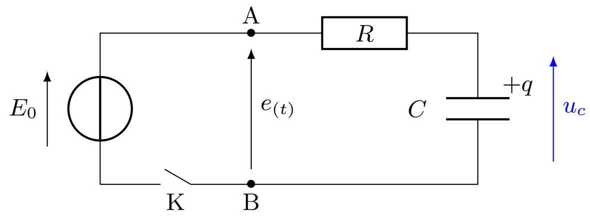
Déterminer toutes les grandeurs électriques qui ne subissent pas de discontinuité lors de la fermeture de l'interrupteur dans le circuit suivant.



2 Réponse d'un circuit capacitif à un échelon de tension

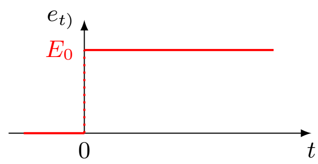
2.1 Charge d'un condensateur

Considérons un circuit constitué d'un condensateur de capacité C en série avec un résistor de résistance R, alimenté par une source idéale de tension E_0. Au départ, le circuit est ouvert (interrupteur ouvert) et le consensateur est initialement déchargé. On étudie l'évolution des grandeurs électriques dans le circuit au cours du temps après fermeture de l'interrupteur à la date $t = 0$.

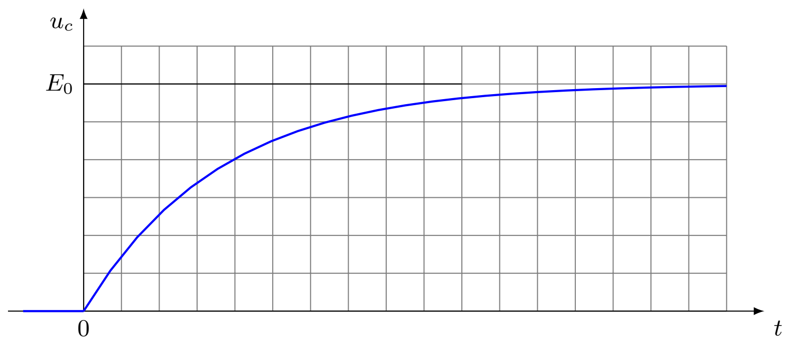


Le circuit est soumis à un **échelon de tension** :

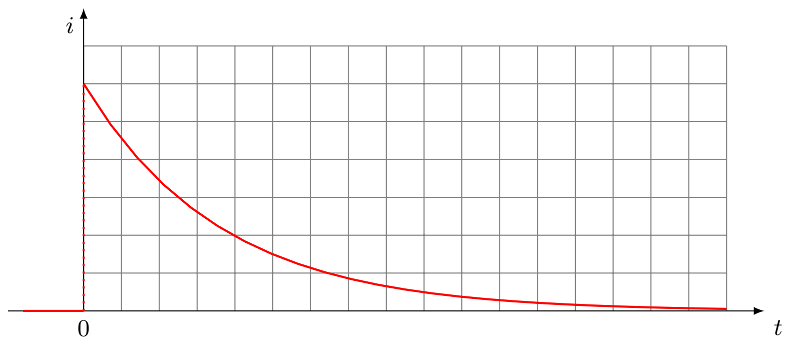
$$e_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E_0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$



Expérimentalement :
- la tension augmente au cours du temps (régime transitoire),
- la tension se stabilise à une valeur maximale E_0 correspondant à une charge maximale portée par les armature (régime stationnaire).

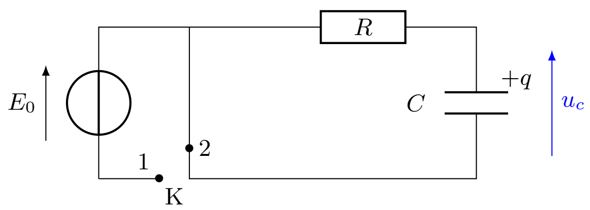


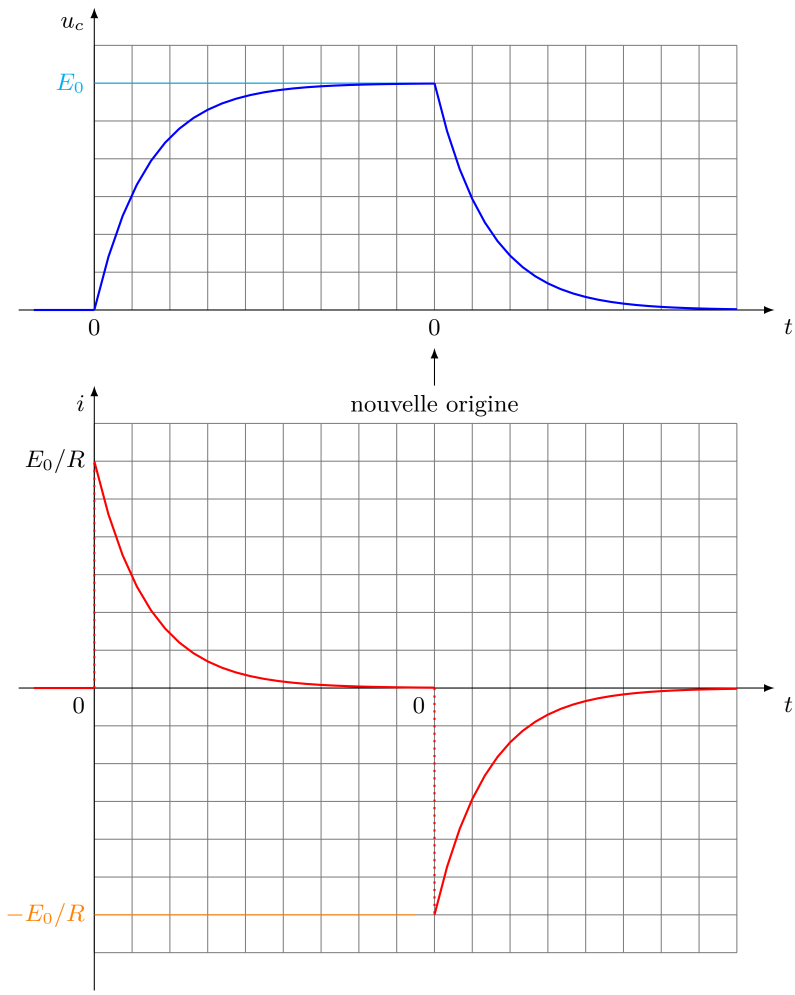
Expérimentalement :
- l'intensité subit une discontinuité à la fermeture de l'interrupteur,
- l'intensité diminue au cours du temps (régime transitoire),
- l'intensité se stabilise à 0 (régime stationnaire).



2.2 Décharge du condensateur : régime libre

On considère le circuit suivant dans lequel l'interrupteur est en position 1 depuis très longtemps. On bascule l'interrupteur de la position 1 à la position 2, et on cherche l'évolution des grandeurs électriques dans le circuit au cours du temps.

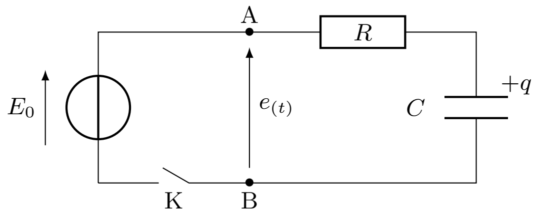




3 Bilan d'énergie dans un circuit capacitif

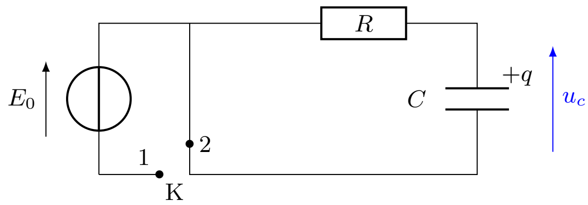
3.1 Établissement de l'équation différentielle par un bilan de puissance

Considérons un circuit constitué d'un condensateur de capacité C en série avec un résistor de résistance R, alimenté par une source idéale de tension E_0. Au départ, le circuit est ouvert (interrupteur ouvert) et le consensateur est initialement déchargé. On étudie l'évolution des grandeurs électriques dans le circuit au cours du temps après fermeture de l'interrupteur à la date $t = 0$.



Application 5 : bilan de puissance lors de la décharge

On considère le circuit suivant dans lequel l'interrupteur est en position 1 depuis très longtemps. On bascule l'interrupteur de la position 1 à la position 2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur en faisant un bilan de puissance.



3.2 Bilan énergétique

Exercices

Application du cours

Exercice 1 : association de condensateurs en parallèle

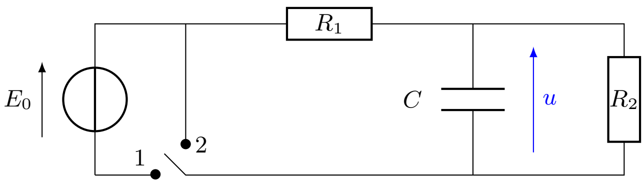
On considère N condensateurs, de capacités respectives C_1, C_2 ... C_N, montés en parallèle. Soit i l'intensité du courant qui alimente les N condensateurs, et i_k l'intensité à travers le condensateur de capacité C_k.
1. Exprimer i en fonction des i_k.
2. Que dire de la tension aux bornes des différents condensateurs ?
3. Quelle est la relation entre i_k et la tension aux bornes du condensateur de capacité C_k ?
4. Montrer que l'ensemble des N condensateurs montés en parallèle est équivalent à un condensateur unique de capacité : $C_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^{N} C_k$. Préciser la charge totale stockée.

Exercice 2 : association de condensateurs en série

Montrer qu'un ensemble de N condensateurs, de capacités C_1, C_2 ... C_N, montés en série est équivalent à un condensateur unique dont on déterminera la capacité équivalente.

Exercice 3 : détermination d'un régime permanent

1. On considère le circuit ci-dessous, dans lequel le condensateur est initialement déchargé. On bascule l'interrupteur en position 1, et on attend l'établissement du régime permanent. Déterminer la valeur atteinte par la tension u aux bornes du condensateur.

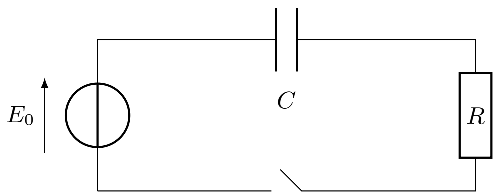


2. On bascule maintenant l'interrupteur en position 2. Déterminer la constante de temps du circuit, et la valeur de u lorsque le régime permanent est atteint.

Entrainement

Exercice 4 : temps de montée du signal

On considère le circuit RC ci-dessous, comportant un résistor de résistance R et un condensateur idéal de capacité C, alimentés par une source de tension idéale E_0. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

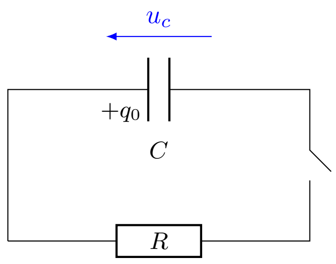


1. Ètablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_c aux bornes du condensateur. Donner l'expression de la constante de temps τ du circuit.
2. Dans le cas où le condensateur est initialement déchargé, déterminer l'évolution de u_c au cours du temps. Vers quelle valeur tend-elle au bout d'un temps très long ?
3. Exprimer le temps t en fonction de u_c et E_0.
4. On appelle *temps de réponse* du circuit t_r, le temps nécessaire pour que u_c atteigne 95% de sa valeur finale. Exprimer t_r en fonction de τ.

5. On appelle *temps de montée* du signal t_m, l'intervalle de temps compris entre le moment où u_c vaut 10% de sa valeur finale et le moment où u_c vaut 90% de sa valeur finale. Exprimer t_m en fonction de τ.
6. Calculer numériquement τ, t_r et t_m pour $E_0 = 1{,}0\,\mathrm{V}$, $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 47\,\mathrm{\mu F}$.

Exercice 5 : décharge d'un condensateur réel

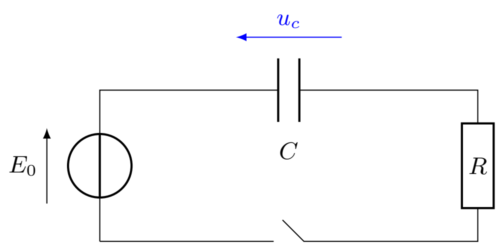
On considère un circuit comportant une résistance R et un condensateur de capacité C, initialement chargé avec une charge q_0. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



1. Déterminer l'évolution de la charge du condensateur en fonction du temps. Quelle est la constante de temps du circuit ? Tracer $q_{(t)}$.
2. En déduire l'évolution de l'intensité circulant dans le circuit en fonction du temps. Tracer $i_{(t)}$ sur le même graphique que précédemment.
3. Le condensateur n'est en réalité pas idéal, et peut être modélisé par une résistance de fuite R_f, en parallèle avec une capacité idéale C. Calculer la nouvelle constante de temps du circuit. Comment évolue-t-elle avec R_f ? En déduire l'influence de R_f sur la durée du régime transitoire.

Exercice 6 : rendement énergétique de la charge d'un condensateur

Un condensateur idéal de capacité C, initialement déchargé, est chargé par une source de tension E_0 à travers une résistance R. Il a été montré dans l'exercice 4 que la tension aux bornes du condensateur est alors : $u_c = E_0 \times (1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$, avec $\tau = RC$.



1. Donner l'expression de l'intensité circulant dans le circuit en fonction du temps.
2. Déterminer l'énergie W_C emmagasinée par le condensateur lorsqu'il est entièrement chargé.

On désire faire un bilan d'énergie, c'est-à-dire comparer l'énergie totale fournie par la source de tension à l'énergie emmagasinée dans le condensateur.

3. Exprimer la puissance fournie par la source de tension à la date t. En déduire l'énergie fournie par la source pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ après la date t.
4. Calculer l'énergie totale W_T fournie par la source entre l'instant initial (fermeture de l'interrupteur) et le régime permanent établi après un temps très long (qu'on pourra assimiler à un temps infini).
5. Quel est le rendement énergétique de la charge du condensateur ? Que devient l'énergie restante ?

Exercice 7 : mise en chauffe d'une maison

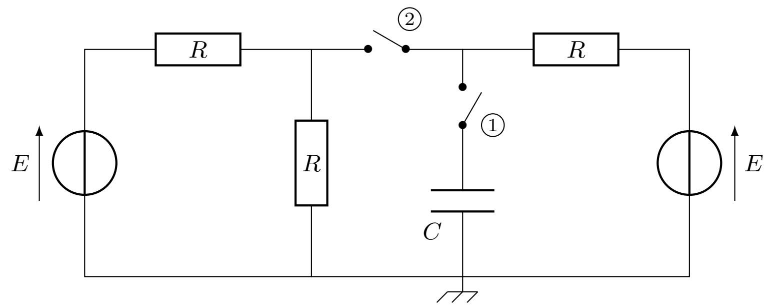
On considère une maison séparée de l'extérieur par des murs de résistance thermique totale R_{th}. Initialement, l'intérieur et l'extérieur sont à la même température T_0. À la date $t = 0$, on met en route des radiateurs qui dégagent une puissance thermique $\mathcal{P}$ constante. On rappelle que l'énergie U d'un gaz varie d'une quantité infinitésimale $\mathrm{d}U = C\,\mathrm{d}T$ lorsque sa température varie de $\mathrm{d}T$, où C est la capacité thermique du gaz.

1. Expliquer qualitativement ce que devient l'énergie fournie par les radiateurs et comment évolue la température intérieure.
2. En supposant que l'évolution du système soit lente, établir l'équation différentielle vérifiée par la température intérieure.
3. Exprimer la valeur de la température intérieure qui sera atteinte, et un ordre de grandeur de la durée nécessaire pour l'atteindre.
4. Faire une analogie avec l'électrocinétique : circuit équivalent et grandeurs électriques.
5. Que se passe-t-il si on éteint les radiateurs ?

Travaux dirigés

Exercice 1 : régime stationnaire

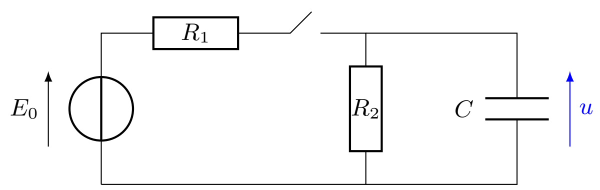
On considère le circuit ci-contre, dans lequel est deux interrupteurs sont initialement ouvert, et le condensateur est déchargé.



1. On ferme l'interrupteur n°1. Déterminer la tension aux bornes du concensateur lorsque le régime stationnaire est atteint.
2. L'interrupteur n°1 restant fermé, on ferme l'interrupteur n°2. Quel est la nouvelle valeur de la tension aux bornes du concensateur lorsque le régime stationnaire est atteint ?

Exercice 2 : charge et décharge d'un condensateur dans un circuit à deux mailles

On considère le circuit ci-dessous, dans lequel le condensateur est initialement déchargé. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. On cherche à déterminer l'évolution de la tension u au cours du temps.

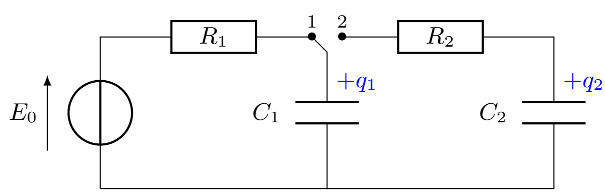


1. Définir les grandeurs électriques dans le circuit. Écrire les relations entre intensité et tension au niveau de chaque dipôle.
2. En utilisant les lois de Kirchhoff, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur pour $t \geq 0$.
3. Évaluer la durée du régime transitoire. Quelle est l'énergie stockée dans le condensateur ?
4. Une fois le régime permanent établi, on ouvre l'interrupteur. Expliquer ce qui se passe, et donner un ordre de grandeur de la durée au bout de laquelle on atteint un nouveau régime permanent.

$R_1 = 330\,\mathrm{k\Omega}$	$C = 0{,}10\,\mathrm{\mu F}$
$R_2 = 100\,\mathrm{k\Omega}$	$E_0 = 10\,\mathrm{V}$

Exercice 3 : transfert d'énergie

On considère le circuit ci-contre, dans lequel l'interrupteur est depuis très longtemps en position 1. Le condensateur C_2 est déchargé.



1. Déterminer la charge q_0 et l'énergie W_0 stockées dans le condensateur C_1.

On bascule l'interrupteur en position 2.

2. Déterminer les charges q_1 et q_2 en régime stationnaire, ainsi que les énergies emmagasinées dans chacun des deux condensateurs.