

Liste d'exercices n°18

Géométrie

Exercice 1.

Soient A, B et M trois points du plan \mathbb{R}^2 . Montrer que M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Exercice 2. Soient A, B et M trois points du plan \mathbb{R}^2 . Montrer que $AM = BM$ si et seulement si M appartient à la droite passant par le milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à (AB) . Cette droite est appelée la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 3. Soient A, B, C trois points non alignés du plan \mathbb{R}^2 . On note $a = BC, b = AC$ et $c = AB$. Soit α l'angle géométrique entre les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$. Cette formule s'appelle la formule d'Al-Kashi.

Exercice 4. Déterminer une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques des droites suivantes.

1. La droite D passant par le point $A(1, 2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (-7, 4)$.
2. La droite D passant par les points $A(1, 2)$ et $B(-5, 3)$.
3. La droite D passant par $A(1, 2)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $2x + y - 4 = 0$.
4. La droite D passant par le point $A(1, 2)$ et à laquelle le vecteur $\vec{n} = (-7, 4)$ est normal.

Exercice 5. Considérons les points $A(1, 1), B(2, 4)$ et $C(3, 1)$. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) .

Exercice 6. Considérons les points $A(0, 0), B(1, 0)$ et $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Soit I le milieu du segment $[BC]$. Déterminer les coordonnées du symétrique I' du point I par rapport à la droite (AC) .

Exercice 7. Considérons les trois droites suivantes :

1. D_1 d'équation $x + 3y - 5 = 0$;
2. D_2 d'équation $x - 2y + 5 = 0$;
3. D_3 d'équation $4x - 3y - 10 = 0$.

Calculer l'aire du triangle délimité par ces droites.

Exercice 8. Soient a, b et c trois réels tels que les trois points $A(0, a), B(b, 0)$ et $C(c, 0)$ soient distincts.

1. Déterminer les équations des trois hauteurs du triangle ABC .
2. Démontrer qu'elles sont concourantes et déterminer leur point d'intersection.

Exercice 9. On considère le cercle \mathcal{C} d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ et le point $A(-1, 0)$.

1. Donner le centre et le rayon du cercle \mathcal{C} .
2. Donner l'ensemble des droites tangentes à \mathcal{C} passant par A .

Exercice 10. Soient a, b et c trois réels, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Soit D la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Soit $M(x_0, y_0)$ un point du plan.

On définit la distance du point M à la droite D par

$$d(M, D) = \inf_{A \in D} \|\overrightarrow{AM}\|.$$

1. Montrer que $d(M, D) = \|\overrightarrow{HM}\|$, où H est le projeté orthogonal de M sur la droite D .
2. Démontrer que

$$d(M, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Indication : fixer un point $A \in D$ et calculer de deux façons différentes $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ où \vec{n} est un vecteur normal à la droite D .

3. En déduire les équations des droites passant par $A(4, 2)$ et situées à distance 2 de l'origine.

Exercice 11. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs non nuls de \mathbb{R}^3 orthogonaux deux à deux. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 12. Donner pour chacun des objets suivants : un point et une base, une représentation paramétrique et une équation cartésienne.

1. La droite du plan d'équation cartésienne $3x - y + 2 = 0$.
2. La droite de l'espace passant par les points $A(1, 2, 3)$ et $B(4, 5, 6)$.
3. Le plan de l'espace d'équation cartésienne $3x + 2y + 5z - 4 = 0$.
4. Le plan de l'espace passant par les points $A(1, 2, 3), B(1, -1, 0)$ et $C(3, 2, 1)$.
5. La droite de l'espace d'équations cartésiennes $\begin{cases} 3x + y - z + 2 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$.
6. La droite de l'espace obtenue comme intersection des plans $x = 0$ et $y = 1$.
7. La droite de l'espace dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3 - 5\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

8. Le plan de l'espace dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda + 2\mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 13. Considérons les points $A(1, 1, 0), B(1, 2, 4)$ et $C(1, 0, 1)$. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point $D(0, 1, 2)$ sur le plan (ABC) .

Exercice 14.

1. Soient les points $O(0, 0, 0), A(1, 2, 1), B(3, 2, 0), C(2, 1, 1)$ et $D(1, 0, 4)$.
 - (a) Donner des équations cartésiennes des plans (OAB) et (OCD) .
 - (b) Etudier l'intersection de ces deux plans.
2. Déterminer tous les réels a tels que les droites D_1 et D_2 d'équations

$$(D_1) \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \text{ et } (D_2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}$$

soient coplanaires.

3. Soient D_3 et D_4 les droites d'équations

$$(D_3) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 3y - 5z = -2 \end{cases} \text{ et } (D_4) \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 3 \\ y - 4z = -5. \end{cases}$$

- (a) Montrer que les droites D_3 et D_4 sont parallèles.
- (b) Donner une équation cartésienne du plan qui les contient.