Liste d'exercices n°17 — Intégration

Exercice 1.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{t+7}{t^2+2t-3}$.
2. Trouver deux réels a et b tels que pour tout $t \in \mathcal{D}$, on ait
$$\frac{t+7}{t^2+2t-3} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+3}.$$
3. En déduire la valeur de l'intégrale suivante :
$$I = \int_{-2}^{0} \frac{t+7}{t^2+2t-3}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. Trouver une primitive de la fonction suivante :
$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}.$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(2t)dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(t)dt$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3(t)\sin^4(t)dt$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(t)\sin^4(t)dt$

Exercice 4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$G\colon x \longmapsto \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x^2+1} f(t)dt.$$
Montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 5. Calculer, si elle existe, la limite suivante :
$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}dt.$$

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{3x}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\sin(x)\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 t^2\arctan(t)\mathrm{d}t$

Exercice 7. Trouver une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \longmapsto \ln^2(x)$
2. $t \longmapsto \sin\left(\sqrt[3]{t}\right)$
3. $t \longmapsto t\ln(t)$.
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2x+5}$
5. (a) $t \longmapsto \sqrt{1-t^2}$

   (b) $x \longmapsto \sqrt{9-4x^2}$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. Supposons que f est impaire. Montrer que F est paire.
2. Supposons que f est paire. Montrer que F est impaire si et seulement si $F(0) = 0$.
3. Supposons que f est T-périodique avec $T > 0$. Montrer que F est T-périodique si et seulement si $F(T) = F(0)$ (ce qui équivaut à dire que $\displaystyle\int_0^T f(x)dx = 0$).

Exercice 9.
Considérons les intégrales suivantes :

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t.$$

1. A l'aide d'un changement de variable affine, montrer que $C = S$.
2. Calculer $C + S$, puis en déduire les valeurs de C et de S.
3. Considérons l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}.$$

   (a) Vérifier que l'intégrale I est bien définie.

   (b) A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale I.

Exercice 10. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{3+2\cos(2x)}dx$

   On pourra faire le changement de variable $u = \cos(x)$.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{3+2\cos(2x)}dx$

   On pourra faire le changement de variable $u = \sin(x)$.

Exercice 11. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^3}{1+t^2+t^4}dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\sin(\theta)}d\theta$, avec le changement de variable $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.
3. $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$, avec le changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Exercice 12. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$. Pour tout tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx.$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 13. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$. Montrer que f garde un signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 14. Calculer les limites, si elles existent, des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2$.