12 Matrices

Dans tout ce chapitre, on travaille sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

12.1 Généralités et opérations sur les matrices

12.1.1 Définition

Définition 1

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
• On appelle matrice de taille (n, p) à cœfficients dans $\mathbb{K}$ toute famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$.
On la représente sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p-1} & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $1 \leqslant j \leqslant p$, le cœfficient en ligne i et colonne j de A, noté $A_{i,j}$ est $a_{i,j}$.
L'ensemble des matrices de taille (n, p) à cœfficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On note $0_{n,p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice nulle, i.e. la matrice dont tous les cœfficients sont nuls.
• Si $n = p$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On appelle matrice carrée toute matrice qui comporte autant de lignes que de colonnes.
On note $0_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice nulle, i.e. la matrice dont tous les cœfficients sont nuls.
• Si $p = 1$, les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelés matrices colonnes et sont de la forme $\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1}. \end{pmatrix}$
• Si $n = 1$, les éléments de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelés matrices lignes et sont de la forme $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \end{pmatrix}$.

Exemple 1. • $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• Si $n = p = 1$, une matrice de taille $(1, 1)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$: c'est simplement un scalaire $a \in \mathbb{K}$.

• $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

• $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ -i & 1 \\ \pi & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$.

Définition 2: Matrices égales

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites égales si

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], a_{i,j} = b_{i,j}.$$

12.1.2 Matrices diagonales, matrices scalaires, matrices triangulaires

Définition 3: Matrices diagonales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
• On appelle cœfficients diagonaux de A les cœfficients $a_{i,i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
• On dit que A est une matrice diagonale si tous ses cœfficients sont nuls, sauf peut-être ses cœfficients diagonaux, i.e. si

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

Exemple 2. • La matrice nulle est une matrice diagonale.

• Les cœfficients diagonaux de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sont 1 et 4.

• Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales.

Définition 4: Matrice identité et matrices scalaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
• On appelle matrice identité de taille n et on note I_n la matrice diagonale de taille n dont tous les cœfficients diagonaux valent 1, i.e.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(I_n)_{i,j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$
Le symbole $\delta_{i,j}$ s'appelle le symbole de Kronecker.
• On appelle matrice scalaire toute matrice diagonale dont tous les cœfficients diagonaux sont égaux, i.e. une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque 1. La matrice nulle de taille n et la matrice identité de taille n sont des matrices scalaires.

Définition 5: Matrices triangulaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• On dit que A est triangulaire supérieure si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i > j$, alors $a_{i,j} = 0$. Ceci signifie que A est de la forme $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Si de plus, tous les cœfficients diagonaux de A sont nuls, on dit que A est triangulaire supérieure stricte et A est alors de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

• On dit que A est triangulaire inférieure si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i < j$, alors $a_{i,j} = 0$. Ceci signifie que A est de la forme $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Si de plus, tous les cœfficients diagonaux de A sont nuls, on dit que A est triangulaire inférieure stricte et A est alors de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 2. • Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) stricte est triangulaire supérieure (resp. inférieure).

• Les matrices diagonales sont à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures.

• La matrice nulle est triangulaire supérieure stricte et triangulaire inférieure stricte.

Exemple 3. • La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

• La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure stricte.

• La matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

• La matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

est triangulaire inférieure stricte.

12.2 Opérations sur les matrices

12.2.1 Somme de matrices

Définition 6: Somme de matrices

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice $A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (A+B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Remarque 3. Avant de sommer deux matrices, il faut s'assurer qu'elles sont de même taille !

Exemple 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 7 & -4 & 8 \end{pmatrix}$. Alors $A+B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Autrement dit, la somme de deux matrices est la somme des cœfficients terme à terme. Ainsi, elle hérite naturellement des propriétés de l'addition sur $\mathbb{K}$, à savoir :

Proposition 1: Propriétés de l'addition

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soient $(A,B,C) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^3$. La somme de matrices vérifie :

1. (Commutativité) $A+B = B+A$.
2. (Associativité) $A+(B+C) = (A+B)+C$.
3. $0_{n,p} + A = A + 0_{n,p} = A$. On dit que $0_{n,p}$ est l'élément neutre pour l'addition.
4. Soit $-A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice définie par : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (-A)_{i,j} = -a_{i,j}$.
   Alors $A + (-A) = -A + A = 0_{n,p}$. On dit que $-A$ est l'opposé de A.

Exemple 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors $-A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ et on a bien

$$A + (-A) = -A + A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12.2.2 Multiplication par un scalaire

Définition 7

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note λA la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les cœfficients sont :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], (\lambda A)_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

Autrement dit, les cœfficients de la matrice λA sont les cœfficients de la matrice A multipliés par λ.

Remarque 4. • Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (-1)A = -A$.
• Les multiples de la matrice identité de taille n sont les matrices scalaires de taille n.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exemple 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Alors $-2A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

Puisque la multiplication d'une matrice par un scalaire s'opère terme à terme, comme pour la somme de matrices, elle vérifie les mêmes propriétés que la multiplication des scalaires.

Proposition 2

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, on a

1. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
2. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$;
3. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

12.2.3 Produit matriciel

Définition 8: Produit matriciel

Soient $(n,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On définit le produit $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}.$$

Remarque 5. • Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, le cœfficient en ligne i et en colonne j du produit AB est la somme des produits terme à terme des cœfficients en ligne i de A et des cœfficients en colonne j de B.

• On peut faire le produit de A par B dès lors que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Il est donc possible que le produit AB existe tandis que le produit BA n'existe pas. Dans le cas où A et B sont des matrices carrées de même taille, on peut toujours former les produits AB et BA mais ils ne sont pas nécessairement égaux. On dit que le produit matriciel n'est pas commutatif.

Exemple 7. • Soient $(n,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), 0_{q,n} \times A = 0_{q,p}$ et $A \times 0_{p,q} = 0_{n,q}$.

En particulier, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), 0_n \times A = A \times 0_n = 0_n$.

• Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A \times I_p = A$ et $I_n \times A = A$.

En effet, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$,

$$(AI_p)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}(I_p)_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\delta_{k,j} = a_{i,j}$$

et

$$(I_nA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (I_n)_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}a_{k,j} = a_{i,j}.$$

En particulier, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), I_n \times A = A \times I_n = A$.

On dit que I_n est l'élément neutre du produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors $AB = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -7 & -3 \\ 1 & -5 & -12 & -1 \end{pmatrix}$ et BA n'existe pas.

• Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2A$.

On voit qu'il est possible d'avoir $AB = 0_2$ avec $A \neq 0_2$ et $B \neq 0_2$. De même, on a $BA = 2A$ sans que $B = 2I_2$.

• Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Alors $AB = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et BA n'existe pas.

•Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

• Soient $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ et $D' = \begin{pmatrix} d'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d'_n \end{pmatrix}$ des matrices diagonales.

On a donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $D_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ccc} d_i & \text{si} & i = j \\ 0 & \text{si} & i \neq j. \end{array} \right.$ et $D'_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ccc} d_i & \text{si} & i = j \\ 0 & \text{si} & i \neq j. \end{array} \right.$

Alors $DD' = D'D = \begin{pmatrix} d_1 d'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n d'_n \end{pmatrix}$.

En effet, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$(DD')_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} D_{i,k} D'_{k,j} = d_i D'_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ccc} d_i d'_i & \text{si} & i = j \\ 0 & \text{si} & i \neq j. \end{array} \right.$$

Pour les mêmes raisons, on a $(D'D)_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ccc} d'_i d_i & \text{si} & i = j \\ 0 & \text{si} & i \neq j. \end{array} \right.$

On en déduit que deux matrices diagonales commutent et que leur produit est la diagonale des produits terme à terme.

• Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

Alors multiplier A à gauche par D, i.e. effectuer l'opération DA, revient à multiplier la ligne i de A par le facteur d_i pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

En effet, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a

$$(DA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} D_{i,k} A_{k,j} = d_i A_{i,j}.$$

De même, si $D' = \begin{pmatrix} d'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d'_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, alors multiplier A à droite par D', i.e. effectuer l'opération AD', revient à multiplier la colonne j de A par le facteur d'_j pour tout $j \in [\![1,p]\!]$.

En effet, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a

$$(AD')_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} D'_{k,j} = d'_j A_{i,j}.$$

• Soient T et T' deux matrices triangulaires supérieures (resp. supérieures strictes) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors TT' et $T'T$ sont également des matrices triangulaires supérieures (resp. supérieures strictes).

En effet, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i > j$, on a

$$(TT')_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} T_{i,k} \underbrace{T'_{k,j}}_{0 \,\text{si}\, k>j} = \sum_{k=1}^{j} \underbrace{T_{i,k}}_{0\,\text{si}\, i>k} T'_{k,j} = 0 \,\text{car}\, i > j.$$

Ainsi, TT' est une matrice triangulaire supérieure dont les cœfficients diagonaux sont pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$(TT')_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} T_{i,k} \underbrace{T'_{k,i}}_{0\,\text{si}\, k>i} = \sum_{k=1}^{i} \underbrace{T_{i,k}}_{0\,\text{si}\, i>k} T'_{k,i} = T_{i,i}T'_{i,i}.$$

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est donc une matrice triangulaire supérieure dont les cœfficients diagonaux sont les produits terme à terme des cœfficients diagonaux des deux matrices.

On montre de même que le produit de deux matrices triangulaires inférieures (resp. inférieures strictes) est une matrice triangulaire inférieure (resp. inférieure stricte).

Proposition 3: Propriétés du produit matriciel

Soient $(n,p,q,r) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

1. (Associativité) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, tout $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, tout $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, alors
$$A(BC) = (AB)C.$$
2. (Distributivité) Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, pour tout $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,
$$(A+B)C = AC + BC.$$
Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour tout $(B,C) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$,
$$A(B+C) = AB + AC.$$
3. (Multiplication par un scalaire) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et tout $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,
$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

Démonstration.

1. Tout d'abord, notons que $BC \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ donc $A(BC) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et que $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ donc $(AB)C \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$, on a
$$(A(BC))_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}(BC)_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \sum_{l=1}^{q} B_{k,l}C_{l,j} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} A_{i,k}B_{k,l}C_{l,j}$$
et
$$((AB)C)_{i,j} = \sum_{l=1}^{q}(AB)_{i,l}C_{l,j} = \sum_{l=1}^{q} C_{l,j} \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,l} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} A_{i,k}B_{k,l}C_{l,j} = (A(BC))_{i,j},$$
ce qui prouve que $A(BC) = (AB)C$.
2. Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, soit $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On a $(A+B)C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, et $AC + BC \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, on a

$$((A+B)C)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p}(A+B)_{i,k}C_{k,j} = \sum_{k=1}^{p}(A_{i,k}+B_{i,k})C_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}C_{k,j}+\sum_{k=1}^{p} B_{i,k}C_{k,j} = (AC)_{i,j}+(BC)_{i,j},$$

i.e. $((A+B)C)_{i,j} = (AC+BC)_{i,j}$, ce qui prouve que $(A+B)C = AC+BC$.
La deuxième preuve est analogue et est laissée au lecteur.

3. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, on a

$$(\lambda(AB))_{i,j} = \lambda(AB)_{i,j} = \lambda\sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j} = \sum_{k=1}^{p}(\lambda A_{i,k})B_{k,j} = \sum_{k=1}^{p}(\lambda A)_{i,k}B_{k,j} = ((\lambda A))B_{i,j}$$

donc $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.
De même,

$$(\lambda(AB))_{i,j} = \lambda(AB)_{i,j} = \lambda\sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} \lambda A_{i,k}(\lambda B_{k,j}) = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}(\lambda B)_{k,j} = (A(\lambda B))_{i,j}$$

donc $\lambda(AB) = A(\lambda B)$.

■

Remarque 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on

$$(\lambda I_n) \times A = \lambda(I_n \times A) = \lambda A = (\lambda A) \times I_n = A \times (\lambda I_n).$$

Ainsi, les matrices scalaires commutent avec toutes les matrices. En fait, ce sont les seules à posséder cette propriété.

Proposition 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA$.
Alors A est une matrice scalaire, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Démonstration. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les cœfficients sont nuls, excpté le cœfficient en ligne i et colonne j qui vaut 1.
Par hypothèse, on a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, AE_{i,j} = E_{i,j}A$.
Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. On a

$$(AE_{i,j})_{k,l} = \sum_{t=1}^{n} A_{k,t}(E_{i,j})_{t,l} = \sum_{t=1}^{n} A_{k,t}\delta_{i,t}\delta_{j,l} = A_{k,i}\delta_{j,l}$$

et

$$(E_{i,j}A)_{k,l} = \sum_{t=1}^{n}(E_{i,j})_{k,t}A_{t,l} = \sum_{t=1}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,t}A_{t,l} = \delta_{i,k}A_{j,l}.$$

Or, pour tout $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$, on a $(AE_{i,j})_{k,l} = (E_{i,j}A)_{k,l}$ donc $A_{k,i}\delta_{j,l} = \delta_{i,k}A_{j,l}$.
• Soient $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq k$. Si on choisit un incide $j \in [\![1,n]\!]$ et qu'on pose $l = j$, l'égalité ci-dessus donne $A_{k,i} = 0$, ce qui assure que la matrice A est diagonale.
• Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Pour $k = i$ et $l = j$, l'égalité ci-dessus donne $A_{i,i} = A_{j,j}$, ce qui signifie que tous les cœfficients diagonaux de A sont égaux. Nommons ce cœfficient λ.
On a donc montré que A était une matrice diagonale dont tous les cœfficients diagonaux sont égaux à λ, i.e. $A = \lambda I_n$. ■

12.2.4 Puissances et formule du binôme

Pour pouvoir multiplier une matrice par elle-même, il faut que celle-ci soit une matrice carrée. Il est donc naturel de définir les puissances d'une matrice carrée.

Définition 9: Puissances d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note

$$A^p = \begin{cases} I_n & \text{si } p = 0 \\ \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}} & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

Remarque 7. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a par associativité du produit matriciel

$$A^pA^q = (\underbrace{A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}})(\underbrace{A \times \cdots \times A}_{q \text{ fois}}) = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{p+q \text{ fois}} = A^{p+q} = A^{q+p} = A^qA^p$$

donc toutes les puissances d'une même matrice A commutent entre elles.

On a également des propriétés analogues aux puissances d'un nombre réel, à savoir :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (A^p)^q = A^{pq} \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, (\lambda A)^p = \lambda^p A^p.$$

Exemple 8. • Pour tout $p \in \mathbb{N}^*, 0_n^p = 0_n$ et $I_n^p = I_n$.

• Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = A$, alors que $A \neq 0_2$ et $A \neq I_2$!

• Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

On constate également que $A^2 + A + I_3 = 0$.

• Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale.

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}, D^p = \begin{pmatrix} d_1^p & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^p \end{pmatrix}$.

• Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 10: Matrices nilpotentes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle matrice nilpotente toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$A^p = 0_n.$$

Proposition 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, i.e. $AB = BA$.
Alors

1. $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, A^p B^q = B^q A^p$.
2. $\forall p \in \mathbb{N}, (AB)^p = A^p B^p = B^p A^p$.

Démonstration.

1. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que pour tout $p \in \mathbb{N}, A^p B = BA^p$.
   • Pour $p = 0$, on a $A^0 = I_n$ donc $A^0 B = I_n B = B = BI_n = BA^0$, ce qui prouve la formule au rang $p = 0$.
   • Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p B = BA^p$. Montrons que $A^{p+1}B = BA^{p+1}$. On a
   $$A^{p+1}B = A(A^p B) = A(BA^p) = (AB)A^p = (BA)A^p = B(AA^p) = BA^{p+1},$$
   ce qui prouve la formule au rang $p+1$ et achève la récurrence. On a donc bien montré que pour tout $p \in \mathbb{N}, A^p B = BA^p$.
   En appliquant la même récurrence, on montre que puisque pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p et B commutent, alors A^p commute avec toute puissance de B donc pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2, A^p B^q = B^q A^p$.
2. Montrons que $(AB)^p = A^p B^p$ par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.
   • Pour $p = 0$, on a $A^0 B^0 = I_n \times I_n = I_n = (AB)^0$ donc la propriété est vraie au rang $p = 0$.
   • Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $(AB)^p = A^p B^p$. Montrons que $(AB)^{p+1} = A^{p+1}B^{p+1}$.
   $$(AB)^{p+1} = (AB)^p AB = (A^p B^p)(AB) = A^p(B^p A)B.$$
   Or, d'après l'alinéa précédent, on sait que $B^p A = AB^p$ donc
   $$(AB)^{p+1} = A^p(AB^p)B = (A^p A)(B^p B) = A^{p+1}B^{p+1},$$
   ce qui prouve la formule au rang $p+1$ et achève la récurrence.
   On a donc montré que pour tout $p \in \mathbb{N}, (AB)^p = A^p B^p$ et d'après l'alinéa précédent, on sait que pour tout $p \in \mathbb{N}, A^p B^p = B^p A^p$.

■

Remarque 8. En général, on n'a pas $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. En effet, pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a
$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$
si $AB \neq BA$.

Ainsi, l'identité remarquable $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ n'est vraie que si A et B commutent.

Plus généralement, la formule du binôme reste valable sous l'hypothèse que A et B commutent.

Proposition 6: Formule du binôme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ telles que $AB = BA$.
Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k.$$

Démonstration. La preuve est la même que celle effectuée dans le chapitre « Dénombrement »dès lors que l'on peut utiliser que

$$(A+B)A^kB^{p-k} = A^{k+1}B^{p-k} + BA^kB^{p-k} = A^{k+1}B^{p-k} + A^kB^{p-k+1}$$

puisque A et B commutent. ■

Exemple 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A = I_3 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque I_3 et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme et on obtient que

$$\forall p \geqslant 2, A^p = (B+I_3)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k I_3^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k.$$

Il s'agit donc de calculer les puissances de B. Or, B est nilpotente puisque $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\forall p \geqslant 3, B^p = 0_3$ donc

$$\forall p \geqslant 2, A^p = \sum_{k=0}^{2} \binom{p}{k} B^k = I_3 + pB + \frac{p(p-1)}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & p & \frac{p(p-1)}{2} \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que la formule est vraie également pour $p = 0$ et $p = 1$ donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & \frac{p(p-1)}{2} \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12.3 Transposée d'une matrice

12.3.1 Définition

Définition 11: Transposée d'une matrice

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle transposée de M, et on note M^T (ou ${}^tM$), la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], (M^T)_{i,j} = M_{j,i}.$$

Autrement dit, la i-ème ligne de M^T est la i-ème colonne de M et la j-ème colonne de M^T est la j-ème ligne de M.

Exemple 10. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0_n^T = 0_n$ et $I_n^T = I_n$. Plus généralement, toute matrice carrée a les mêmes cœfficients diagonaux que sa transposée et toute matrice diagonale est égale à sa transposée.

- Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Alors $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
- Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Alors $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

- Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors $M^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Proposition 7: Propriétés de la transposition

Soient $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(M^T)^T = M$.
2. Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,
$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T.$$
3. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.
4. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(A^T)^p = (A^p)^T$.

Démonstration.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $M^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ donc $(M^T)^T \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on a
$$((M^T)^T)_{i,j} = (M^T)_{j,i} = M_{i,j}$$
donc $(M^T)^T = M$.
2. Soient $(A, B) \in (M_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
On a $\lambda A + \mu B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donc $(\lambda A + \mu B)^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. De même, $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ donc $\lambda A^T + \mu B^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$, on a
$$(\lambda A^T + \mu B^T)_{i,j} = \lambda(A^T)_{i,j} + \mu(B^T)_{i,j} = \lambda A_{j,i} + \mu B_{j,i} = (\lambda A + \mu B)_{j,i} = ((\lambda A + \mu B)^T)_{i,j}$$
donc $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$.
3. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On a $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ donc $(AB)^T \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. De même, $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B^T \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ donc $B^T A^T \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, n]\!]$, on a
$$(B^T A^T)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} (B^T)_{i,k} (A^T)_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{j,k} B_{k,i} = (AB)_{j,i} = ((AB)^T)_{i,j}$$
donc $(AB)^T = B^T A^T$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(A^T)^p = (A^p)^T$.
   - Pour $p = 0$, on a $(A^T)^0 = I_n = I_n^T = (A^0)^T$.
   - Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $(A^T)^p = (A^p)^T$. Montrons que $(A^T)^{p+1} = (A^{p+1})^T$.

   On a
$$(A^{p+1})^T = (A^p \times A)^T = A^T (A^p)^T = A^T (A^T)^p = (A^T)^{p+1},$$
ce qui prouve la formule au rang $p + 1$ et achève la récurrence.

■

Remarque 9. Pour tout (A, B, C) triplet de matrices tel que le produit ABC existe, on a
$$(ABC)^T = ((AB)C)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T.$$

12.3.2 Matrices carrées symétriques

Définition 12: Matrices symétriques, matrices antisymétriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que M est symétrique si $M^T = M$, i.e. si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, M_{i,j} = M_{j,i}$. Dans ce cas, M est de la forme
$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,n} \\ M_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & M_{n-1,n} \\ M_{1,n} & \dots & M_{n-1,n} & M_{n,n} \end{pmatrix}.$$
2. On dit que M est antisymétrique si $M^T = -M$, i.e. si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, M_{i,j} = -M_{j,i}$. Dans ce cas, M est de la forme
$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_{1,2} & \dots & M_{1,n} \\ -M_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & M_{n-1,n} \\ -M_{1,n} & \dots & -M_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 10. Si M est antisymétrique, on a pour tout $1 \leqslant i \leqslant n, M_{i,i} = -M_{i,i}$ donc $M_{i,i} = 0$. Nécessairement, les cœfficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Exemple 11. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0_n$ est à la fois symétrique et antisymétrique.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n$ est une matrice symétrique. Plus généralement, les matrices scalaires et les matrices diagonales sont des matrices symétriques.

• La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique.

• La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Proposition 8

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si A et B sont symétriques (resp. antisymétriques), alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda A + \mu B$ est une matrice symétrique (resp. antisymétrique).
2. Si A est symétrique, pour tout $p \in \mathbb{N}, A^p$ est symétrique.
3. Si A est antisymétrique, pour tout $p \in \mathbb{N}, A^{2p}$ est symétrique et A^{2p+1} est anti-symétrique.

Démonstration.

1. • Si $A^T = A$ et $B^T = B$, on a
$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = \lambda A + \mu B$$
donc si A et B sont symétriques, alors $\lambda A + \mu B$ est symétrique.

- Si $A^T = -A$ et $B^T = -B$, on a

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = -\lambda A - \mu B = -(\lambda A + \mu B)$$

donc si A et B sont antisymétriques, alors $\lambda A + \mu B$ est antisymétrique.

2. Si A est symétrique, on a $A^T = A$ donc pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A^p)^T = (A^T)^p,$$

ce qui prouve que A^p est symétrique.

3. Si A est antisymétrique, on a $A^T = -A$ donc pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A^{2p})^T = (A^T)^{2p} = (-A)^{2p} = (-1)^{2p} A^{2p} = A^{2p}$$

donc A^{2p} est symétrique.
De même, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A^{2p+1})^T = (A^T)^{2p+1} = (-A)^{2p+1} = (-1)^{2p+1} A^{2p+1} = -A^{2p+1}$$

donc A^{2p+1} est antisymétrique.

■

Exemple 12. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice antisymétrique.
Alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.

Remarque 11. Le produit de matrices symétriques qui commutent est une matrice symétrique. En effet, si A et B sont symétriques, on a $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$ si A et B commutent.

En revanche, le produit de matrices symétriques qui ne commutent pas n'est pas une matrice symétrique. En effet, si A et B sont symétriques, on a $(AB)^T = B^T A^T = BA \neq AB$ si A et B ne commutent pas.

Proposition 9

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Il existe une unique matrice symétrique S et une unique matrice antisymétrique A telles que

$$M = S + A.$$

Démonstration. On raisonne par analyse synthèse.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$.

- **Analyse :** Supposons qu'il existe une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique A telles que $M = S + A$. Alors $M^T = S^T + A^T = S - A$. Ainsi,

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(M - M^T),$$

ce qui prouve l'unicité si existence de S et A.

- **Synthèse :** Montrons l'existence de S et A. Posons

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(M - M^T).$$

On a $S^T = \frac{1}{2}(M^T + (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T + M) = S$ donc S est symétrique.

De même, $A^T = \frac{1}{2}(M^T - (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T - M) = -A$ donc A est antisymétrique.

Enfin, on a bien $S + A = \frac{1}{2}(M + M^T + M - M^T) = M$.

On a donc bien prouvé l'existence d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique A telles que $M = S + A$, et on a montré leur unicité. ■

Exemple 13. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Alors

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

et

$$A = \frac{1}{2}(M - M^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a bien S symétrique, A antisymétrique et $S + A = M$.

12.4 Matrices et systèmes linéaires

12.4.1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Soient $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$.

On considère le système linéaire de n équations à p inconnues $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{1,j}x_j & + & \ldots & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{i,j}x_j & + & \ldots & a_{i,p}x_p & = & b_i \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{n,j}x_j & + & \ldots & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Ce système équivaut à l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

En posant $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on obtient alors l'équivalence

$$(S) \Leftrightarrow AX = B.$$

Le système est donc équivalent à une équation matricielle d'inconnue X : c'est l'écriture matricielle du système (S). On dit que A est la matrice associée au système.

Exemple 14. Considérons le système (S) : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right.$. Il s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

12.4.2 Rang d'une matrice

On a vu dans le chapitre « Systèmes linéaires »que le rang d'un système ne dépend que de son membre de gauche, c'est à dire de sa matrice associée. Ceci légitime la définition suivante.

Définition 13: Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle rang de la matrice A, et on note $\text{rg}(A)$ le rang de tout système linéaire associé à la matrice A.

Remarque 12. Comme pour les systèmes linéaires, on a nécessairement $\text{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$.

On admettra momentanément le résultat suivant (qui sera démontré dans le chapitre « Applications linéaires »).

Proposition 10

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$.

Remarque 13. Pour déterminer le rang d'une matrice A, on utilise la même méthode que pour les systèmes linéaires, à savoir l'algorithme du pivot de Gauss. On effectue une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice pour obtenir une matrice échelonnée.

D'après la proposition précédente, le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée. On peut donc également calculer le rang de A en calculant le rang de A^T. Pour ce faire, on peut procéder à des opérations élémentaires sur les lignes de A^T, ce qui revient à effectuer ces opérations élémentaires sur les colonnes de A.

Puisqu'une opération élémentaire conserve le rang, on pourra utiliser les opérations élémentaires sur les lignes de A vues dans le chapitre « Systèmes linéaires »auxquelles on ajoute les opérations élémentaires sur les colonnes analogues, à savoir :

$$C_i \leftrightarrow C_j, \quad ,C_i \leftarrow \lambda C_i \quad C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j.$$

Exemple 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour calculer le rang de A, on utilise exactement la même méthode que pour déterminer le rang du système (S) : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & & & - & z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$.

Echelonnons la matrice A.

$$A \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\overset{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve $\text{rg}(A) = 2 < 3$. Puisque le système (S) est compatible, il admet donc une infinité de solutions.

12.5 Matrices inversibles

12.5.1 Définition et premières propriétés

Définition 14: Matrice inversible

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

On dit que B est l'inverse de A, et on note $B = A^{-1}$.

Proposition 11: Unicité de l'inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.
Il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe deux matrices $(B, C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ telles que $AB = BA = AC = CA = I_n$.

Par associativité du produit matriciel, on a

$$B = B \times I_n = B \times (AC) = (BA)C = I_n \times C = C$$

donc $B = C$, ce qui prouve l'unicité de l'inverse de A. ∎

Remarque 14. • Par définition, une matrice inversible commute nécessairement avec son inverse.

• L'unicité de l'inverse justifie la notation A^{-1}.

• Si A est inversible, on note pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1} \times \cdots \times A^{-1}}_{p\,\text{fois}}$. Les règles sur les puissances de matrices s'appliquent de même pour les puissances négatives de matrices inversibles.

• Dans la preuve, on n'a en fait utilisé que les égalités $AC = BA = I_n$.

Mais dans le cas des matrices carrées, $BA = I_n \Rightarrow AB = I_n$. On prouvera ce résultat dans le chapitre « Applications linéaires ».

• Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Soient B et C deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = AC$. En multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient

$$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow B = C.$$

De même, si $BA = CA$, en multipliant à droite par A^{-1}, on obtient

$$BAA^{-1} = CAA^{-1} \Rightarrow B = C.$$

Ainsi, si A est inversible, on peut simplifier par A dans une égalité.

Exemple 16. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n \times I_n = I_n$ donc I_n est inversible et $(I_n)^{-1} = I_n$.

En revanche, 0_n n'est pas inversible car pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \times 0_n = 0_n \times A = 0_n$.

• Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale telle que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n, d_i \neq 0$.

Alors D est inversible et $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$.

En revanche, si une matrice diagonale D possède au moins un cœfficient nul (par exemple s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $d_i = 0$), alors D n'est pas inversible car pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la ligne i de DA est nulle.

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
- La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car pour toute matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a

$$AB = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2.$$

Plus généralement, toute matrice triangulaire stricte (supérieure ou inférieure) n'est pas inversible car si $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) stricte, alors pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la dernière (resp. première) ligne de TA est nulle.

- Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

On remarque que $A^3 - 2A^2 - A = -2I_3$ d'où $-\frac{1}{2}(A^2 - 2A - I_3)A = I_3$, ce qui implique que A est inversible et que

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A^2 - 2A - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Soit A^{-1} son inverse.
Alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démonstration. Par définition, on a $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$, ce qui prouve que A^{-1} est inversible et que $(A^{-1})^{-1} = A$. ∎

Proposition 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
Alors λA est inversible et

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

Démonstration. En effet, on a

$$(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right) = \left(\lambda \times \frac{1}{\lambda}\right)AA^{-1} = I_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A) = \left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda\right)A^{-1}A = I_n.$$

∎

Exemple 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $-I_n$ est inversible et son inverse est $(-I_n)^{-1} = \frac{1}{-1}I_n = -I_n$.

Proposition 14: Inverse du produit

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. La matrice AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Pour tout $p \in \mathbb{Z}, A^p$ est inversible et $(A^p)^{-1} = A^{-p}$.

Démonstration.

1. On a par associativité du produit matriciel :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

et

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n,$$

ce qui prouve que AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}, A^p$ est inversible et $(A^p)^{-1} = A^{-p}$.

• Pour $p = 0, A^0 = I_n$ donc A^0 est inversible et

$$(A^0)^{-1} = I_n^{-1} = I_n = A^{-0}$$

donc la propriété est vraie au rang $p = 0$.

• Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé tel que A^p est inversible et $(A^p)^{-1} = A^{-p}$. Montrons que A^{p+1} est inversible et que $(A^{p+1})^{-1} = A^{-(p+1)}$.

On a $A^{p+1} = A^p \times A$ donc A^{p+1} est inversible comme produit de deux matrices inversibles et

$$(A^{p+1})^{-1} = (A^p \times A)^{-1} = A^{-1}(A^p)^{-1} = A^{-1}A^{-p} = A^{-1}(A^{-1})^p = (A^{-1})^{p+1} = A^{-(p+1)},$$

ce qui prouve la formule au rang $p + 1$ et achève la récurrence.

Il reste à montrer que la formule est vraie pour $p < 0$. Soit $p < 0$. Ainsi, $-p > 0$, donc A^{-p} est inversible et on a d'après ce qui précède

$$(A^{-p})^{-1} = A^p,$$

ce qui prouve que A^p est inversible et que $(A^p)^{-1} = A^{-p}$.

$\blacksquare$

Remarque 15. • En revanche, la somme de deux matrices inversibles n'est pas forcément inversible. En effet, I_n et $-I_n$ sont inversibles mais $I_n + (-I_n) = 0_n$ n'est pas inversible.

• Les matrices nilpotentes ne sont pas inversibles. En effet, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$. Or, si A était inversible, d'après la proposition précédente, A^p devrait l'être également, ce qui est absurde puisque $A^p = 0_n$, donc A n'est pas inversible.

Proposition 15: Inverse de la transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.
Alors A^T est inversible et

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Démonstration. On a

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n \quad \text{et} \quad (A^{-1})^TA^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n,$$

ce qui prouve que A^T est inversible et que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. $\blacksquare$

Exemple 18. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.On a vu que A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

On en déduit que la matrice $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et que son inverse est $(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Remarque 16. • Si A est inversible et symétrique, alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$ donc A^{-1} est également symétrique.

• Si A est inversible et antisymétrique, alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$ donc A^{-1} est également antisymétrique.

12.5.2 Déterminant d'une matrice de taille $(2,2)$

Définition 15: Déterminant dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On définit le déterminant de la matrice A, noté $\det(A)$, ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, par

$$\det(A) = ad - bc \in \mathbb{K}.$$

Exemple 19. • Soit $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\det(I_2) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$.

De même, $\det(-I_2) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^2 = 1$.

• $\det(0_2) = 0$.

• Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses cœfficients diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad - 0 \times 0 = ad.$$

• Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit de ses cœfficients diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad - 0 \times b = ad.$$

On a le même résultat pour les matrices triangulairs inférieures.

• $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times 1 - 2 \times 2 = -5$.

Proposition 16: Propriétés du déterminant

1. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A).$$
2. Pour tout couple de matrices $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))^2$,
$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B).$$
3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}, \det(A^p) = \det(A)^p$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice inversible.
Alors $\det(A) \neq 0, \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}, \det(A^p) = \det(A)^p$.

Démonstration.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ donc
$$\det(\lambda A) = \lambda^2 ad - \lambda^2 bc = \lambda^2(ad - bc) = \lambda^2 \det(A).$$
2. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$ d'où
$$\begin{aligned} \det(AB) &= (aa' + bc')(cb' + dd') - (ca' + dc')(ab' + bd') \\ &= aca'b' + ada'd' + bcb'c' + bdc'd' - aca'b' - bca'd' - adb'c' - bdc'd' \\ &= ada'd' + bcb'c' - bca'd' - adb'c' \\ &= (ad - bc)(a'd' - b'c') \\ &= \det(A)\det(B). \end{aligned}$$
3. Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}, \det(A^p) = \det(A)^p$.
• Pour $p = 0$, on a $\det(A^0) = \det(I_2) = 1 = \det(A)^0$ donc la propriété est vraie au rang $p = 0$.
• Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\det(A^p) = \det(A)^p$. Montrons que $\det(A^{p+1}) = \det(A)^{p+1}$.
On a
$$\det(A^{p+1}) = \det(A^p \times A) = \det(A^p) \times \det(A) = \det(A)^p \det(A) = \det(A)^{p+1},$$
ce qui prouve la propriété au rang $p + 1$ et achève la récurrence.
4. D'après le deuxième alinéa, puisque $AA^{-1} = I_2$, on a
$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_2) = 1.$$
Nécessairement, $\det(A) \neq 0$ et on a $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \det(A)^{-1}$.
On a déjà vu que pour tout $p \in \mathbb{N}, \det(A^p) = \det(A)^p$. Il reste à montrer la propriété pour $p < 0$.
Soit $p < 0$. Alors $-p > 0$ et d'après le troisième alinéa, on a $\det(A^{-p}) = \det(A)^{-p}$.

Or, puisque A est inversible, A^p est inversible et $(A^p)^{-1} = A^{-p}$ donc

$$\det(A^p) = \frac{1}{\det(A^{-p})} = \frac{1}{\det(A)^{-p}} = \det(A)^p.$$

Ainsi, la propriété est vraie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

■

Remarque 17. Ainsi, pour tout couple de matrices $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))^2$, même si $AB \neq BA$, on a $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$.

Exemple 20. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = 5$ et $\det(B) = -2$.

Par ailleurs,

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

donc $\det(AB) = 88 - 98 = -10 = \det(A)\det(B)$ et

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ -2 & 21 \end{pmatrix}$$

donc $\det(BA) = -42 + 32 = -10 = \det(A)\det(B)$.

Proposition 17: Caractérisation des matrices $(2, 2)$ inversibles

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. • On a déjà vu dans la proposition précédente que si A est inversible, alors $\det(A) \neq 0$.

Posons $B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On vérifie alors que

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = I_2$$

et

$$BA = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = I_2.$$

Par unicité de l'inverse, on a nécessairement $A^{-1} = B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

• Réciproquement, supposons que $\det(A) \neq 0$. On peut donc poser $B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Comme ci-dessus, on vérifie que $AB = BA = I_2$, ce qui prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. ■

Exemple 21. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = 4 \neq 0$ donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 18. • On retrouve que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)^2}\begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(A)^2}(ad-bc) = \frac{\det(A)}{\det(A)^2} = \frac{1}{\det(A)}.$$

• D'après les calculs de déterminants faits ci-dessus, on en déduit qu'une matrice diagonale de taille $(2,2)$ est inversible si et seulement si tous ses cœfficients diagonaux sont non nuls.

De même, une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) de taille $(2,2)$ est inversible si et seulement si tous ses cœfficients diagonaux sont non nuls.

12.5.3 Recherche de l'inverse

Dans cette section, nous allons présenter une méthode pour déterminer l'inverse d'une matrice. Celle-ci est fondée sur l'algorithme du pivot de Gauss.

Rappelons que les opérations élémentaires que l'on peut effectuer sur une matrice pour l'échelonner sont les suivantes :

$$L_i \leftrightarrow L_j; \quad L_i \leftarrow \lambda L_i \,\text{si}\, \lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang n.

Remarquons que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, effectuer l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ sur la matrice A revient à la multiplier à gauche par la matrice de permutation

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est à dire la matrice qu'on obtient après avoir effectué l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ sur la matrice I_n.

De même, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, effecturer l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ sur la matrice A revient à la multiplier à gauche par la matrice de dilatation

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est à dire la matrice qu'on obtient après avoir effectué l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ sur la matrice I_n.

Enfin, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, effectuer l'opération $L_i \leftrightarrow L_i + \lambda L_j$ sur la matrice A revient à la multiplier à gauche par la matrice de transvection

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & \lambda & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est à dire la matrice qu'on obtient après avoir effectué l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ sur la matrice I_n.

On appelle ces trois types de matrices les matrices élémentaires.

Puisqu'on a supposé la matrice A de rang n, on sait qu'après l'avoir multipliée à gauche par des matrices de cette forme, on peut obtenir une matrice diagonale à cœfficients non nuls de la forme $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$. En multipliant à gauche par les matrices de dilatation $D_i(\frac{1}{d_i})$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on obtiendra alors I_n.

Finalement, si on note B le produit de toutes les matrices élémentaires qu'on aura appliquées à A, on a obtenu $BA = I_n$, ce qui signifie que A est inversible et que $B = A^{-1}$.

Il reste à exprimer A^{-1}. Or, on a vu que multiplier I_n par une matrice élémentaire revient à effectuer l'opération élémentaire associée à cette matrice sur I_n.

Ainsi, si on réalise sur I_n la même suite d'opérations qu'on a effectuées sur A, on aura fait le produit $BI_n = B = A^{-1}$.

Pour obtenir A^{-1}, on réalise donc l'algorithme du pivot de Gauss sur A et on effectue les mêmes opérations simultanément sur I_n.

Remarque 19. On a démontré au passage que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang n est inversible. On verra plus loin que la réciproque est vraie.

Exemple 22. Reprenons l'exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On réalise l'algorithme du pivot de Gauss sur la matrice A pour l'échelonner et on effectue simultanément les mêmes opérations sur I_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow 5L_3 + 2L_2]{L_1 \leftarrow 5L_1 - 2L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & -6 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + 6L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 15 & 10 & 30 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2]{L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right).$$

On a fait apparaître I_3 à gauche, ce qui signifie que les opérations qu'on a effectuées reviennent à multiplier à gauche par A^{-1}. On a effectué les mêmes opérations sur I_3, c'est à dire qu'on a multiplié I_3 par A^{-1}. La matrice qu'on voit apparaître à droite est donc A^{-1}.

On retrouve que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

12.5.4 Résolution d'un système de Cramer

On rappelle qu'un système de Cramer est un système à n équations et n inconnues admettant une unique solution. Si un système de Cramer s'écrit matriciellement $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors cette dernière équation possède une unique solution. La proposition suivante caractérise les matrices associées à des systèmes de Cramer.

Proposition 18: Caractérisation des matrices inversibles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible ;
2. Pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = B$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
3. Il existe une matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que l'équation $AX = B$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
4. $\text{rg}(A) = n$.

Démonstration. Pour montrer que les quatre assertions sont équivalentes, on va effectuer un raisonnement circulaire, c'est à dire montrer que 1) $\Rightarrow$ 2), puis 2) $\Rightarrow$ 3), puis 3) $\Rightarrow$ 4),et enfin 4) $\Rightarrow$ 1).

• Supposons que A est inversible.

Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En multipliant par A^{-1}, on a les équivalences :

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow I_n \times X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Ainsi, si la matrice A est inversible, alors l'équation $AX = B$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On a donc bien prouvé que 1) $\Rightarrow$ 2).

• Supposons que pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = B$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Alors il existe clairement une matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que l'équation $AX = B$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On a donc bien prouvé que 2) $\Rightarrow$ 3).

• Supposons qu'il existe une matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que l'équation $AX = B$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Considérons le système (S) associé à cette équation matricielle. Nécessairement, ce système admet une unique solution. Or, on a vu dans le chapitre « Systèmes linéaires »que le seul cas où un système à n équations et n inconnues pouvait avoir une unique solution était lorsque le rang du système était égal à n (si le rang du système est strictement inférieur à n, soit il est incompatible, soit il admet une infinité de solutions).

On en déduit que le rang de (S) est égal à n, donc par définition $\text{rg}(A) = n$.

On a donc bien prouvé que 3) $\Rightarrow$ 4).

• Supposons que $\text{rg}(A) = n$. On a montré dans la section précédente que dans ce cas, on pouvait appliquer à A l'algorithme du pivot de Gauss pour trouver l'inverse de A, donc A est inversible.

On a donc bien prouvé que 4) $\Rightarrow$ 1). ■

Remarque 20. • Une matrice carrée de taille n est donc inversible si et seulement si elle est de rang n.

Ainsi, une matrice diagonale, qui est déjà sous forme échelonnée, est inversible si et seulement si ses pivots sont tous non nuls. On en déduit qu'une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses cœfficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas, son inverse est également une matrice diagonale.

De même, une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses cœfficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas, son inverse est également une matrice triangulaire supérieure.

Le même résultat demeure pour une matrice triangulaire inférieure car sa transposée est triangulaire supérieure et on a vu qu'une matrice est inversible si et seulement si sa transposée l'est également.

• Si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède une ligne entièrement constituée de 0, alors $\operatorname{rg}(A) < n$ donc A n'est pas inversible.

De même, si A possède une colonne entièrement constituée de 0, alors $\operatorname{rg}(A^T) < n$ donc $\operatorname{rg}(A) < n$, ce qui implique que A n'est pas inversible.

• Si on souhaite résoudre un système dont l'écriture matricielle est $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut commencer par échelonner la matrice A pour déterminer son rang.

Si elle est de rang n, on calcule son inverse grâce à la méthode du pivot de Gauss et on résout le système en utilisant l'équivalence

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

• Pour qu'une matrice soit inversible, il suffit que l'équation $AX = 0$ admette la seule solution $X = 0$.

Exemple 23. Considérons le système $(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ -x & + & 3y & & & = & -2 \\ & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$. L'écriture matricielle de ce système est $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a vu que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ donc

$$(S) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

donc l'unique solution du système est le triplet $(x, y, z) = (20, 6, 15)$.

Remarque 21. Réciproquement, si on montre que l'équation $AX = B$ admet une unique solution pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, puisque cette solution est nécessairement $X = A^{-1}B$, la résolution d'un système générique $AX = B$ permet de déterminer A^{-1}.

Exemple 24. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On a

$$AX = B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & a \\ -x & + & 3y & & & = & b \\ & - & 2y & + & z & = & c \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 2z & = & a+b \\ & - & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow 5L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 5L_3 + 2L_2}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x & & & - & 6z & = & 3a-2b \\ & & 5y & - & 2z & = & a+b \\ & & & & z & = & 2a+2b+5c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & & & = & 3a+2b+6c \\ & y & & = & a+b+2c \\ & & z & = & 2a+2b+5c \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} B$ d'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.