Corrigé du devoir maison n°13

Problème 1 : Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale de Wallis

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)(\cos(x) - 1)dx$.
Or, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos^n(x) \geqslant 0$ et $\cos(x) - 1 \leqslant 0$ donc $\cos^n(x)(\cos(x) - 1) \leqslant 0$.
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)(\cos(x) - 1)dx \leqslant 0$ donc $W_{n+1} - W_n \leqslant 0$.
$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties en posant $u(x) = \cos^{n+1}(x), u'(x) = -(n+1)\sin(x)\cos^n(x), v'(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \sin(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos^{n+1}(x)dx \\
&= [\sin(x)\cos^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^n(x)dx \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(x))\cos^n(x)dx \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)dx \\
&= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}
\end{aligned}$$

donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ d'où $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.}$

3. • Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.
Pour $n = 0$, on a $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}\frac{(2\times 0)!}{(2^0 0!)^2} = \frac{\pi}{2}$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $W_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$. Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$, i.e. $W_{2n+2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}$.

D'après la question précédente, on a $W_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} W_{2n}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1)!}{2(n+1)(2^n n!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+2)!}{(2n+2)2(n+1)(2^n n!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+2)!}{2^2(n+1)^2(2^n n!)^2}$$

d'où $W_{2n+2} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}$, ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}}$.

• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

Pour $n = 0$, on a $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$ et $\dfrac{(2^0 0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!} = 1$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $W_{2n+1} = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$. Montrons la propriété au rang $n+1$, i.e. $W_{2n+3} = \dfrac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}$.

D'après la question précédente, on a $W_{2n+3} = \dfrac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2n+2)^2(2^n n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} = \frac{2^2(n+1)^2(2^n n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!},$$

ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

• Si n est pair, il eixste $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et d'après la question précédente, on a

$$(n+1)W_n W_{n+1} = (2k+1)W_{2k}W_{2k+1} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{\pi}{2} \frac{2k+1}{2k+1} = \frac{\pi}{2}.$$

• Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ et d'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
(n+1)W_n W_{n+1} &= (2k+2)W_{2k+1}W_{2k+2} \\
&= (2k+2)\frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!} \frac{\pi}{2} \frac{(2k+2)!}{(2^{k+1}(k+1)!)^2} \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{(2k+2)^2}{(2(k+1))^2} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, (n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}}$.

5. Puisque la suite$(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}, W_n$ est l'intégrale d'une fonction continue positive et non identiquement nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, W_n > 0$ d'où en divisant par W_n les inégalités ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1,$$

i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}, \dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$, on déduit du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$, i.e. $\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n+1}}$.
Puisque $n \underset{+\infty}{\sim} n+1$, on a donc d'après la question précédente :

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)W_nW_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} nW_n^2$$

d'où $W_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.
Ainsi, $\sqrt{W_n^2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, W_n > 0$ donc $\sqrt{W_n^2} = |W_n| = W_n$.
On en conclut que

$$\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

6. (a) Posons pour tout $x > -1, f(x) = x - \ln(1+x)$.
La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a pour tout $x > -1$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Pour tout $x > -1, 1+x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de x. On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout $x \in]-1, 0[, f'(x) < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[-1, 0]$. Pour tout $x \in]0, +\infty[, f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
On en déduit que f admet un minimum en $x = 0$ donc pour tout $x > -1, f(x) \geqslant f(0) = 0$ i.e.

$$\boxed{\forall x > -1, x \geqslant \ln(1+x).}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0, \sqrt{n}]$.

• Si $x = \sqrt{n}$, alors $x^2 = n$ donc $1 - \frac{x^2}{n} = 0$ d'où $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = 0 \leqslant e^{-x^2}$.

• Si $x \in [0, \sqrt{n}[$, $-\frac{x^2}{n} > -1$ donc d'après la question précédente :

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leqslant -\frac{x^2}{n}$$

puis

$$n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leqslant -x^2.$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que

$$e^{n\ln(1-\frac{x^2}{n})} \leqslant e^{-x^2}.$$

Finalement, on a bien pour tout $x \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2}$.

Par ailleurs, pour tout $x \in [0, \sqrt{n}]$, $\frac{x^2}{n} > -1$ donc d'après la question précédente :

$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \leqslant \frac{x^2}{n}$$

d'où, par multiplication par $-n < 0$:

$$-n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \geqslant -x^2$$

puis par croissance de la fonction exponentielle :

$$e^{-n\ln(1+\frac{x^2}{n})} \geqslant e^{-x^2},$$

i.e. pour tout $x \in [0, \sqrt{n}], e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0, \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

Enfin, par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

• Posons le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ dans la première intégrale.

On a alors $x^2 = n\sin^2(t), dx = \sqrt{n}\cos(t)dt$. Par ailleurs, quand $x = \sqrt{n}, \sin(t) = 1$ donc $t = \frac{\pi}{2}$ et quand $x = 0, \sin(t) = 0$ donc $t = 0$.

On obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2(t)\right)^n \sqrt{n}\cos(t)dt \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t))^n \cos(t)dt \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)dt
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n}W_{2n+1}$, ce qui prouve d'après la question précédente que $\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx.$

• Posons le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ dans la troisième intégrale.

On a alors $x^2 = n\tan^2(t), dx = \sqrt{n}(1+\tan^2(t))dt$. Par ailleurs, quand $x = \sqrt{n}, \tan(t) = 1$ donc $t = \dfrac{\pi}{4}$ et quand $x = 0, \tan(t) = 0$ donc $t = 0$.

On obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2(t))^{-n}\sqrt{n}(1+\tan^2(t))dt \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2(t)}\right)^{1-n} dt \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(t)dt.
\end{aligned}$$

Or, d'après la relation de Chasles,

$$W_{2n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(t)dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t)dt \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(t)dt$$

car pour tout $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], \cos^{2n-2}(t) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t)dt \geqslant 0.$

En multipliant par $\sqrt{n}$, on obtient alors

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(t)dt \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2},$$

ce qui implique finalement d'après la question précédente que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.}$$

(d) • On a montré en question 5 que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ donc

$$W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} = \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{4+\frac{2}{n}}}$$

puis $\sqrt{n}W_{2n+1} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4+\frac{2}{n}}}$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{4+\frac{2}{n}}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n+1} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

• De même,

$$W_{2n-2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} = \sqrt{\frac{\pi}{4n-4}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{4-\frac{4}{n}}}$$

donc $\sqrt{n}W_{2n-2} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4-\frac{4}{n}}}$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{4-\frac{4}{n}}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n-2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

D'après le théorème des gendarmes, on en conclut que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Problème 2 : Irrationalité de π

1. (a) $I_0 = \pi \displaystyle\int_0^1 f_0(t)\sin(\pi t)dt = \pi \int_0^1 \sin(\pi t)dt = \pi \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 = -\cos(\pi) + \cos(0)$

donc $\boxed{I_0 = 2.}$

D'autre part, on a $I_1 = \pi^3 \displaystyle\int_0^1 f_1(t)\sin(\pi t) = \pi^3 \int_0^1 (t-t^2)\sin(\pi t)dt$.

On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = t - t^2, u'(t) = 1 - 2t$ et $v'(t) = \sin(\pi t)$, d'où $v(t) = -\dfrac{1}{\pi}\cos(\pi t)$. On obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \pi^3 \left(\left[-\frac{1}{\pi}(t-t^2)\cos(\pi t)\right]_0^1\right) - \pi^3 \int_0^1 -\frac{1}{\pi}(1-2t)\cos(\pi t)dt \\ &= \pi^2 \int_0^1 (1-2t)\cos(\pi t)dt. \end{aligned}$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $u(t) = 1-2t$, d'où $u'(t) = -2$ et $v'(t) = \cos(\pi t)$ d'où $v(t) = \dfrac{1}{\pi}\sin(\pi t)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_1 &= \pi^2 \left(\left[\frac{1}{\pi}(1-2t)\sin(\pi t)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi t)dt\right) \\ &= 2\pi\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_0^1 \\ &= -2(\cos(\pi) - \cos(0)) \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_1 = 4.}$

(b) Soit $n \geqslant 2$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivée pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f_n'(t) = n(1-2t)(t-t^2)^{n-1}.$$

De même, f_n' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et puisque $n-1 \geqslant 1$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_n''(t) &= -2n(t-t^2)^{n-1} + n(n-1)(1-2t)^2(t-t^2)^{n-2} \\
&= (t-t^2)^{n-2}(-2n(t-t^2) + n(n-1)(1-2t)^2) \\
&= (t-t^2)^{n-2}(-2nt + 2nt^2 + n(n-1)(1-4t+4t^2)) \\
&= (t-t^2)^{n-2}(n(n-1) + (-4n^2+2n)t + (4n^2-2n)t^2) \\
&= (t-t^2)^{n-2}(n(n-1) + (4n^2-2n)(t^2-t)) \\
&= (t-t^2)^{n-2}(n(n-1) - 2n(2n-1)(t-t^2)) \\
&= n(n-1)(t-t^2)^{n-2} - 2n(2n-1)(t-t^2)^{n-1}
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\text{pour tout}\, t \in \mathbb{R}, f_n''(t) = -2n(2n-1)f_{n-1}(t) + n(n-1)f_{n-2}(t).}$

Remarquons que puisque $n \geqslant 2$ et $n-1 \geqslant 1$, on a $f_n(0) = f_n(1) = f_n'(0) = f_n'(1) = 0$.

En réalisant deux intégrations par parties successives, on trouve

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\int_0^1 f_n(t)\sin(\pi t)dt \\
&= \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\left(\left[-\frac{1}{\pi}f_n(t)\cos(\pi t)\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 f_n'(t)\cos(\pi t)dt\right) \\
&= \frac{\pi^{2n}}{n!}\int_0^1 f_n'(t)\cos(\pi t)dt \\
&= \frac{\pi^{2n}}{n!}\left(\left[\frac{1}{\pi}f_n'(t)\sin(\pi t)\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 f_n''(t)\sin(\pi t)dt\right) \\
&= -\frac{\pi^{2n-1}}{n!}\int_0^1 (-2n(2n-1)f_{n-1}(t) + n(n-1)f_{n-2}(t))\sin(\pi t)dt \\
&= 2n(2n-1)\frac{\pi^{2n-1}}{n!}\int_0^1 f_{n-1}(t)\sin(\pi t)dt - n(n-1)\frac{\pi^{2n-1}}{n!}\int_0^1 f_{n-2}\sin(\pi t)dt \\
&= 2(2n-1)\frac{\pi^{2(n-1)+1}}{(n-1)!}\int_0^1 f_{n-1}(t)\sin(\pi t)dt - \pi^2\frac{\pi^{2(n-2)+1}}{(n-2)!}\int_0^1 f_{n-2}\sin(\pi t)dt
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{\text{pour tout}\, n \geqslant 2, I_n = 2(2n-1)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}.}$

2. Pour tout $t \in [0,1], \pi t \in [0,\pi]$ donc $0 \leqslant \sin(\pi t) \leqslant 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   • Si $n = 0$, pour tout $t \in [0,1]$, $f_0(t) = 1$ donc on a bien pour tout $t \in [0,1]$,

$$0 \leqslant f_0(t)\sin(\pi t) = \sin(\pi t) \leqslant 1.$$

   • Supposons que $n > 0$.
   On a vu que pour tout $t \in [0,1] f_n'(t) = n(1-2t)(t-t^2)^{n-1} = n(1-2t)t^{n-1}(1-t)^{n-1}$.
   Or, pour tout $t \in [0,1], nt^{n-1}(1-t)^{n-1} \geqslant 0$ donc $f_n'(t)$ est du signe de $1-2t$, i.e. $f_n'(t) \geqslant 0$ si $t \in [0,\frac{1}{2}]$ et $f_n'(t) \leqslant 0$ si $t \in [\frac{1}{2},1]$.
   Ainsi, la fonction f_n est croissante sur $[0,\frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2},1]$.
   Puisque $n \geqslant 1$, on a $f_n(0) = f_n(1) = 0$ et $f_n(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}-\frac{1}{4})^n = \dfrac{1}{4^n}$ donc pour tout $t \in [0,1], 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

On a donc bien pour tout $t \in [0,1], 0 \leqslant f_n(t)\sin(\pi t) \leqslant \dfrac{1}{4^n}\sin(\pi t) \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } t \in [0,1], 0 \leqslant f_n(t)\sin(\pi t) \leqslant \dfrac{1}{4^n}.}$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \int_0^1 f_n(t)\sin(\pi t)dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{4^n}dt$$

d'où

$$0 \leqslant \frac{\pi^{2n+1}}{n!}\int_0^1 f_n(t)\sin(\pi t)dt \leqslant \frac{\pi^{2n+1}}{4^n n!},$$

i.e. $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi^{2n+1}}{4^n n!}.}$

3. (a) Montrons par une récurrence de pas double que pour tout $n \in \mathbb{N}, b^n I_n \in \mathbb{N}$.
•**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $b^0 I_0 = 2$ et pour $n = 1$, on a $b^1 I_1 = bI_1 = 4b \in \mathbb{N}$.
• **Hérédité** : Soit $n \geqslant 2$ fixé. On suppose que $b^{n-2}I_{n-2} \in \mathbb{N}$ et $b^{n-1}I_{n-1} \in \mathbb{N}$.
Montrons que $b^n I_n \in N$.
D'après la question 1.b), on a

$$\begin{aligned} b^n I_n &= b^n(2(2n-1)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}) \\ &= 2(2n-1)bb^{n-1}I_{n-1} - b^2\pi^2 b^{n-2}I_{n-2} \\ &= 2(2n-1)bb^{n-1}I_{n-1} - a^2 b^{n-2}I_{n-2}. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $b^{n-2}I_{n-2} \in \mathbb{N}$ et $b^{n-1}I_{n-1} \in \mathbb{N}$ donc $b^n I_n \in \mathbb{Z}$.
Enfin, puisque $b^n I_n \geqslant 0$, on a bien $b^n I_n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve la propriété au rang n et achève la récurrence.
On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, b^n I_n \in \mathbb{N}.}$

(b) D'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant b^n I_n \leqslant \frac{b^n \pi^{2n+1}}{4^n n!} = \frac{\pi}{4^n}\frac{(b\pi^2)^n}{n!}.$$

Puisque $4 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4^n} = 0$.
D'autre part, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(b\pi^2)^n}{n!} = 0$ donc par produit de limites, on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b^n I_n = 0.}$

(c) D'après les deux question précédentes, la suite $(b^n I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et est à valeurs positives donc il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0, 0 \leqslant b^n I_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, b^n I_n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $b^{n_0}I_{n_0} = 0$, d'où $I_{n_0} = 0$ puisque $b \neq 0$.
Comme $I_{n0} = \dfrac{\pi^{2n_0+1}}{n_0!}\displaystyle\int_0^1 f_{n_0}(t)\sin(\pi t)dt$, alors $\displaystyle\int_0^1 f_{n_0}(t)\sin(\pi t)dt = 0$.
Or, on a déjà vu que la fonction $t \longmapsto f_{n_0}(t)\sin(\pi t)$ est continue et positive sur $[0,1]$ donc l'intégrale I_{n_0} est nulle si et seulement si pour tout $t \in [0,1] f_{n_0}(t)\sin(\pi t) = 0$, ce qui est absurde car $f_{n_0}(\frac{1}{2})\sin(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{4^{n_0}} > 0$.
Ainsi, ayant supposé que π est rationnel, on aboutit à une contradicition.

$$\boxed{\text{Le nombre } \pi \text{ est donc irrationnel.}}$$