Liste d'exercices n°19 — Espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels ? des $\mathbb{C}$-sous-espaces vectoriels ?

1. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
2. $F = \{(2x+3y, x, y-x) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \geqslant 2y\}$
4. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$
5. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z = 0\}$
6. $F = \{x+iy \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } x = y\}$
7. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y^2 = 0\}$
8. $F = \{(2z+3y, x) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$
9. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 12\}$
10. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = z\}$
11. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid iz + \bar{z} = 0\}$

Exercice 2. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x+iy-z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$.
2. Soient les vecteurs $e = (1, -i, 2)$ et $f = (1, -2i, 3)$.
   (a) Montrer que les vecteurs e et f appartiennent à F.
   (b) Soient les vecteurs $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)$ et $w = (-1,1,0)$. Le vecteur u est-il combinaison linéaire
      i. des vecteurs e et f ?
      ii. des vecteurs v et w ?
   (c) Soit $a \in F$. Le vecteur a est-il combinaison linéaire des vecteurs e et f ?

Exercice 3. Soit $F = \{(-a, a, b, -b, -6a) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.
2. Donner un système d'équations cartésiennes de F.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5. Pour chacune des familles suivantes, préciser si la famille est libre, génératrice de $\mathbb{R}^3$ et si c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. $((9,-3,7);(27,-9,21))$
2. $((9,-3,7);(27,-9,21);(5,-5,1))$
3. $((1,2,2);(5,6,6);(0,0,0))$
4. $((0,4,2);(2,-2,-3))$
5. $((1,-1,0);(0,1,-1);(1,1,0))$
6. $((1,0,-2);(2,3,1);(7,9,5);(1,0,1))$

Exercice 6. Soient

$$F = \{(4s, -5s, -s, -2s) \mid s \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-5z+2t = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que F est inclus dans G.
3. Construire une base de G en ajoutant des vecteurs à une base de F.

Exercice 7. Dans les trois cas suivants, montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel.
Déterminer alors une base de E, de F puis de $E \cap F$.

1. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y-z=0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+z=y\}$
2. $E = \{(x,y,2y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{C}^2\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,|\, x=0 \,\text{et}\, y=2iz\}$
3. $E = \{(x,y,z,t,u,v) \in \mathbb{R}^6 \,|\, x+y+z=t-y+3u=2u+v-x=2v+t\}$
   et $F = \{(a+c, a+b-c, a+c, b+a, c-a+2b, b) \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$

Exercice 8. On pose $\mathcal{B} = ((1,-1,-2);(1,-1,-3);(0,1,-2))$ et $\mathcal{B}' = ((1,1,1);(1,2,4);(1,3,9))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Quelles sont les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ dans la base $\mathcal{B}$?
   (b) Soit $u=(x,y,z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.
3. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Ecrire la matrice du vecteur u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 9. Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs suivants :

1. $a=(1,1,0,1), b=(1,-1,1,0), c=(2,0,1,1)$ et $d=(0,-2,1,-1)$.
2. $u=(3,-6,3,-9)$ et $v=(-2,4,-2,6)$.

Exercice 10. Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une famille libre de E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(e_1-e_2, e_2-e_3, \ldots, e_{p-1}-e_p, e_p-e_1)$.
2. $(e_1, e_1+e_2, \ldots, e_1+\cdots+e_p)$.

Exercice 11. Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et (e_1,e_2,e_3) une base de E. On définit les vecteurs suivants :

$$f_1 = e_1+e_2, f_2=e_3, f_3=e_1-e_2, f_4=e_3-e_1 \,\text{et}\, f_5=e_3+2e_2.$$

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. (f_1,f_2,f_3)
2. (f_1,f_4,f_5)
3. (f_1,f_2,f_3,f_4)

Exercice 12. Soient a et b deux réels.
Trouver la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs suivants :

$$(a,1,1), (1,a,1) \,\text{et}\, (1,1,a).$$

Exercice 13. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$e_1=(1,-2,5,-3), e_2=(2,3,1,-4) \,\text{et}\, e_3=(3,8,-3,-5).$$

1. Trouver une base et la dimension de F.
2. Compléter cette base de F en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 14. Posons $F = \text{Vect}\{(1,3,-1),(1,-3,2)\}$ et $G = \text{Vect}\{(1,9,-4),(0,2,-1)\}$. A-t-on $F \subset G$? $G \subset F$? $F = G$?

Exercice 15. Quel est le rang des familles de vecteurs suivantes ?

1. $((1,-2,3,1);(4,5,6,7);(1,0,2,3))$.
2. $((1,3,1,-2,-3);(1,4,3,-1,-4);(2,3,-4,-7,-3);(3,8,1,-7,-8))$.

Exercice 16.

1. Evaluer la dimension de $\mathbb{C}^4$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Déterminer le rang de la famille suivante (dans $\mathbb{C}^4$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) :
$$((1,i,1+i,-i);(-i,0,2-i,1+i);(0,-1,0,1);(3i,-2-i,3i,-5-i)).$$
3. Recommencer les deux questions précédentes en considérant $\mathbb{C}^4$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 17. Soient $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ réels distincts.
Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on note L_i l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ \text{pour tout } j \in [\![0;n]\!] \text{ tel que } j \neq i, L_i(x_j) = 0. \end{cases}$$

Montrer que la famille $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 18. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle **somme** de F et G l'ensemble suivant :

$$F + G = \{x + y \mid (x,y) \in F \times G\}.$$

1. Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $\dim(F+G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.
3. On suppose maintenant que $F \cap G = \{0_E\}$ (on dit alors que les sous-espaces vectoriels F et G sont en **somme directe**).
Montrer que $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.