Devoir en temps libre n° 24

Analogie entre régimes transitoires en électricité et en thermodynamique

On considère une bouteille en verre contenant $m = 0{,}75\,\mathrm{kg}$ d'eau liquide (capacité thermique massique $c_e = 4{,}18\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$) initialement à $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$. Les parois de la bouteille ont une résistance thermique totale $R_{\mathrm{th}} = 7{,}3\cdot 10^{-2}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$. La bouteille est placée dans un thermostat dont la température est de $T_{\mathrm{ext}} = 5\,°\mathrm{C}$. On suppose que la température de l'eau est homogène dans la bouteille et que la pression à l'intérieur est constante.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la différence de température $T_{(t)} - T_{\mathrm{ext}}$ entre l'intérieur et l'extérieur de la bouteille.

Avant la mise au point des ordinateurs numériques, on utilisait intensivement des calculateurs analogiques, décrits ci-dessous.

Extrait de la page wikipedia *Calculateur analogique*.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Calculateur_analogique

Un calculateur analogique est une application particulière des méthodes analogiques consistant à remplacer l'étude d'un système physique donné par celle d'un autre système physique régi par les mêmes équations. Pour que cela présente un intérêt, le système « analogue » doit être facile à construire, les mesures aisées et moins coûteuses que sur le système réel. Un calculateur analogique proprement dit est constitué d'un ensemble de modules électroniques interconnectés pour modéliser un problème à résoudre. Les résultats (mesure des tensions électriques représentant les différentes variables) sont le plus souvent enregistrés sous forme de courbes en fonction du temps.

L'OME P2 ci-dessous est un calculateur analogique construit en 1952 par la Société d'Électronique et d'Automatisme (SEA), aujourd'hui disparue.

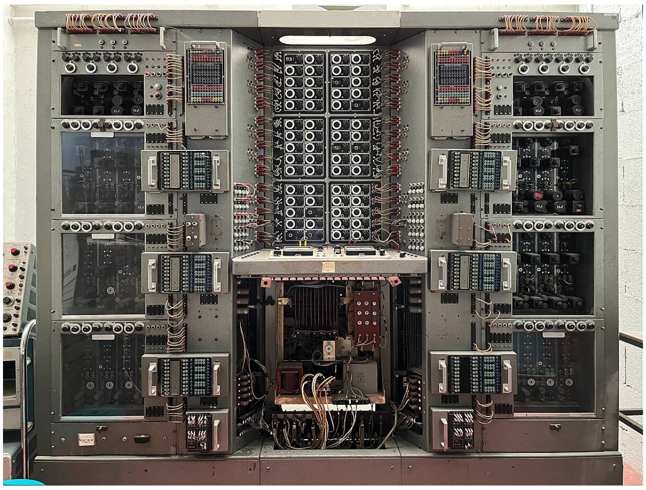


photo de Damien Boureille
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:SEA_OME_P2_-_ACONIT.jpg

2. Proposer un circuit électronique analogue au problème du refroidissement de la bouteille. On veillera à bien indiquer :

- les manipulations à effectuer sur le circuit (interrupteur à basculer par exemple),
- la ou les grandeurs à mesurer, et comment,
- les valeurs des composants à utiliser.

L'objectif étant de mimer au mieux le problème réel, on discutera de la faisabilité d'une analogie parfaite. On n'oubliera pas de considérer que les appareils de mesure peuvent avoir une influence sur le circuit !

Corrigé du devoir en temps libre n° 24

éléments de correction

1. Soit le système constitué par l'eau de la bouteille ; il est isobare et on peut lui appliquer un bilan enthalpique. Il n'y a pas de travaux autres que les forces pressantes, et la puissance thermique reçue correspond à la dissipation à travers les parois. En appelant T la température de l'eau, qui est une fonction du temps, on a :

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{Q\,\text{reçue}} \Rightarrow mc_e\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{T_{\text{ext}} - T}{R_{\text{th}}}$$

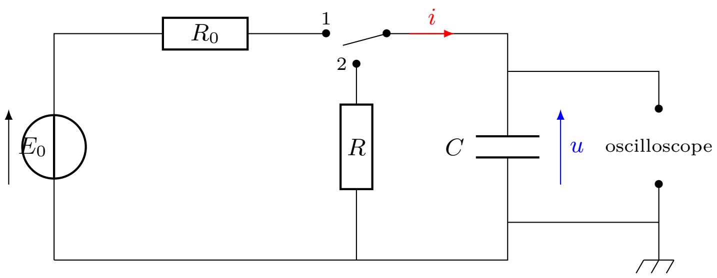
où la puissance thermique reçue est bien négative puisque de l'énergie sort de la bouteille. Comme T_{ext} est une constante, on peut la rajouter dans la dérivée :

$$mc_e\frac{\mathrm{d}(T - T_{\text{ext}})}{\mathrm{d}t} = -\frac{T - T_{\text{ext}}}{R_{\text{th}}} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(T - T_{\text{ext}})}{\mathrm{d}t} + \frac{T - T_{\text{ext}}}{mc_eR_{\text{th}}} = 0$$

ce qui est l'équation différentielle correspondant à un régime transitoire du premier ordre, de constante de temps :

$$\tau = mc_eR_{\text{th}} = 0,75 \times 4{,}18 \cdot 10^3 \times 7{,}3 \cdot 10^{-2} = 229\,\text{s}$$

2. Ce problème est mathématiquement analogue à la décharge d'un condensateur à travers une résistance, au cours de laquelle on suit la tension aux bornes du condensateur. Soit un condensateur préalablement chargé sous une tension E_0 jusqu'à atteindre le régime stationnaire (interrupteur dans la position 1). Le basculement de l'interrupteur en position 2 entraine la décharge du condensateur à travers la résistance R.



Après un temps très long avec l'interrupteur en position 1, la tension aux bornes du condensateur est E_0. Le basculement de l'interrupteur en position 2 réduit le circuit à un condensateur en série avec la résistance R. L'équation différentielle vérifiée par u s'obtient en écrivant successivement la relation entre l'intensité et la tension u aux bornes du condensateur et de la résistance :

$$\begin{cases} u = -Ri \\ i = C \times \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{cases} \Rightarrow -\frac{u}{R} = C \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

soit l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{RC} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC$$

L'analogie avec le refroidissement de la bouteille est facile à faire :

thermodynamique	électricité
$T - T_{\text{ext}}$	u
mc_e	C
R_{th}	R

Pour que le circuit électrique modélise numériquement le refroidissement de la bouteille, il faut que les valeurs numériques correspondent, autrement dit que :

thermodynamique	électricité
$T_{\text{ini}} - T_{\text{ext}} = 15\,°\text{C}$	$u_0 = 15\,\text{V}$
$\tau = mc_e R_{\text{th}} = 229\,\text{s}$	$\tau = RC = 229\,\text{s}$

La condition initiale est facile à réaliser : il suffit de prendre une tension excitatrice $E_0 = 15\,\text{V}$. concernant la seconde condition, il faut trouver R et C de sorte que la constante de temps soit égale à celle du refroidissement de la bouteille. Sachant que les valeurs usuelles de capacité sont plutôt de l'ordre de quelques microfarad au plus, on peut proposer par exemple :

- $C = 1\,\mu\text{F} = 1 \cdot 10^{-6}\,\text{F}$ et $R = 229 \cdot 10^{6}\,\Omega = 229\,\text{M}\Omega$
- $C = 10\,\mu\text{F} = 1 \cdot 10^{-5}\,\text{F}$ et $R = 229 \cdot 10^{5}\,\Omega = 22{,}9\,\text{M}\Omega$
- $C = 100\,\mu\text{F} = 1 \cdot 10^{-4}\,\text{F}$ et $R = 229 \cdot 10^{4}\,\Omega = 2{,}29\,\text{M}\Omega$

Les valeurs de R sont grandes, ce qui pose problème car elles sont du même ordre de grandeur que la résistance de l'appareil qui mesure la tension u (par exemple un oscilloscope). Pour cela, il faut soit réduire la valeur de R, soit tenir compte de la résistance R_v du voltmètre.

On peut augmenter la valeur de la capacité en mettant plusieurs condensateurs en parallèle. Par exemple 10 condensateurs de capacité $C = 100\,\mu\text{F}$, sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{\text{eq}} = 10 \times C = 1 \cdot 10^{3}\,\mu\text{F} = 1 \cdot 10^{-3}\,\text{F}$; pour obtenir la valeur de $\tau = 229\,\text{s}$, il faut alors $R = 0{,}29 \cdot 10^{6}\,\Omega = 0{,}29\,\text{M}\Omega$.

Si on doit prendre en compte la résistance du voltmètre (ou de l'oscilloscope), alors le condensateur se décharge dans les deux résistances R et R_v en parallèle, qui sont équivalentes à une résistance R_{eq}. La constante de temps est alors :

$$\tau = R_{\text{eq}} C = \frac{R \times R_v}{R + R_v} \times C$$

Si on connait la résistance interne du voltmètre, on en déduit la valeur de la résistance R à choisir :

$$(R + R_v) \times \tau = R \times R_v \times C \Rightarrow R = \frac{R_v \times \tau}{C \times R_v - \tau}$$

Pour fixer les idées, si on prend $C = 100\,\mu\text{F} = 1 \cdot 10^{-4}\,\text{F}$, et qu'on suppose que $R_v = 1\,\text{M}\Omega = 1 \cdot 10^{6}\,\Omega$, alors le calcul donne une valeur de R négative, ce qui est logique car en mettant deux résistances en parallèle, on ne peut obtenir une résistance équivalente plus grande que la plus petite des deux.

Pour $C = 1 \cdot 10^{3}\,\mu\text{F} = 1 \cdot 10^{-3}\,\text{F}$ (par exemple en mettant des condensateurs en parallèle) et toujours $R_v = 1\,\text{M}\Omega$, on trouve $R = 2{,}97 \cdot 10^{6}\,\Omega = 2{,}97\,\text{M}\Omega$.

Bien entendu, dans la réalité, on dispose de nombreux autres dipôles, tripôles ou quadrupôles que des résistors et des condensateurs, ce qui permet de résoudre ce genre de problème.