

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 2. SUJET A.

Vendredi 29 septembre 2023.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer l'ensemble sur lequel elle est dérivable et donner sa dérivée, comme dans l'exemple. On ne demande aucune justification.

f	dérivable sur :	dérivée f'
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \frac{x^2 + 1}{3x - 2}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$	$x \mapsto \frac{3x^2 - 4x - 3}{(3x - 2)^2}$
$x \mapsto x^3 \cos(2x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 3x^2 \cos(2x) - 2x^3 \sin(2x)$
$x \mapsto \sqrt{x^2 + 3}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$
$x \mapsto [\ln(x)]^2$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{2}{x} \ln x$
$x \mapsto (2x + 5)^4$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 8(2x + 5)^3$

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f (justifier)
- Déterminer l'ensemble sur lequel f est dérivable (justifier)
- Calculer f'

1. On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \underbrace{x^2 - 3}_{\substack{\text{trinôme de racines} \\ \sqrt{3} \text{ et } -\sqrt{3}}} \geq 0 \iff x > \sqrt{3} \text{ ou } x < -\sqrt{3}$$

$$\text{Donc } \mathcal{D}_f =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty[.$$

2. Δ $\sqrt{}$ n'est pas dérivable en 0.

Au brouillon: on cherche les valeurs de x pour lesquelles $x^2 - 3 = 0$ (c'est $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$: on doit donc enlever ces valeurs à $\mathcal{D}_f$ pour obtenir l'ensemble de dérivabilité)

$$\text{On pose } \mathcal{D}' =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[.$$

f est donc composée de $x \mapsto x^2 - 3$,¹ dérivable sur $\mathcal{D}'$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par $\sqrt{}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est dérivable sur $\mathcal{D}'$,

$$\text{et } \forall x \in \mathcal{D}', \quad f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$$

Exercice 3

Soit n un entier naturel non-nul. Exprimer en fonction de n :

1. $\sum_{k=0}^n (2k+1)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (2k+1) &= 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)(n+1) \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

2. Exprimer à l'aide de factorielles : $\prod_{k=1}^n (3k)$

$$\prod_{k=1}^n (3k) = 3^n \prod_{k=1}^n k = 3^n n!$$

3. On suppose $n \geq 4$. Exprimer à l'aide de factorielles : $\prod_{k=4}^n k$

$$\prod_{k=4}^n k = \frac{\prod_{k=1}^n k}{\prod_{k=1}^3 k} = \frac{n!}{3!}$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 2. SUJET B.

Vendredi 29 septembre 2023.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non-nul. Exprimer en fonction de n :

1. $\sum_{k=0}^n (4k+1)$

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^n (4h+1) &= 4 \sum_{h=0}^n h + \sum_{h=0}^n 1 = 4 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= 2n(n+1) + (n+1) = (n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

2. On suppose $n \geq 5$. Exprimer à l'aide de factorielles : $\prod_{k=5}^n k$

$$\prod_{h=5}^n h = \frac{\prod_{h=1}^n h}{\prod_{h=1}^4 h} = \frac{n!}{4!}$$

3. Exprimer à l'aide de factorielles : $\prod_{k=1}^n (2k)$

$$\prod_{h=1}^n (2h) = 2^n \prod_{h=1}^n h = 2^n n!$$

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer l'ensemble sur lequel elle est dérivable et donner sa dérivée, comme dans l'exemple. On ne demande aucune justification.

f	dérivable sur :	dérivée f'
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \frac{x^2+1}{2x+3}$	$\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$	$x \mapsto \frac{2x^2+6x-2}{(2x+3)^2}$

$x \mapsto x^4 \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto 4x^3 \ln x + x^3$
$x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$
$x \mapsto [\cos(x)]^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -2 \sin x \cos x$
$x \mapsto (3x + 2)^5$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 15(3x + 2)^4$

Exercice 3 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f (justifier)
2. Déterminer l'ensemble sur lequel f est dérivable (justifier)
3. Calculer f'

1. On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2} \text{ ou } x \geq \sqrt{2}$$

$$\text{Donc } \mathcal{D}_f =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[.$$

2. f est la composée de $x \mapsto x^2 - 2$, dérivable sur $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par $\sqrt{\cdot}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est dérivable sur $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.

$$\textcircled{3} \quad \forall x \in]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$$