NOM - Prénom : CORRECTION

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 3. SUJET A.

Vendredi 6 octobre 2023.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 Exprimer les sommes suivantes en fonction de n (entier naturel non-nul) :

1.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$$

$$S_n = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$
$$= 2\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= (n+1)(n+1)$$
$$= (n+1)^2$$

2.

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} 3^{k+2}$$

$$T_n = 3^2 \sum_{k=1}^{n} 3^k = 9 \times 3 \times \frac{1-3^n}{1-3} = 9 \times 3 \, \frac{(3^n-1)}{3-1}$$

(*) somme des termes d'une suite géométrique de raison $3 \neq 1$

donc
$$T_n = \frac{27}{2}(3^n - 1)$$

Exercice 2 n est un entier naturel supérieur ou égal à 10. Exprimer les produits suivants à l'aide de factorielles :

1.

$$P_n = \prod_{k=6}^{n+1} k$$

$$P_n = 6 \times 7 \times \dots \times (n+1)$$
$$= \frac{(n+1)!}{5!}$$

2.

$$Q_n = \prod_{k=4}^{n} 2k$$

$Q_n = 2^{n-4+1}\left(\prod_{k=4}^{n} k\right)$

$= 2^{n-3} \dfrac{n!}{3!}$

Exercice 3 Soit $z = \dfrac{1+i}{1+2i}$. Déterminer la forme algébrique de z, puis calculer son module.

$z = \dfrac{(1+i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \dfrac{1+2+i(1-2)}{5} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{i}{5}$ (forme algébrique)

donc $|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Exercice 4

Soit

$$f : x \mapsto \sqrt{3x-3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f'.

① Soit $x \in \mathbb{R}$.
$x \in \mathcal{D}_f \iff 3x-3 \geq 0 \iff x \geq 1$ donc $\mathcal{D}_f = [1, +\infty[$

② f est la composée de $x \mapsto 3x-3$, dérivable sur $]1,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par $\sqrt{\ }$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc f est dérivable sur $]1,+\infty[$

et $\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-3}}$

NOM - Prénom : CORRECTION **BCPST 12**

Interrogation écrite n^o3.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 3. SUJET B.

Vendredi 6 octobre 2023.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 Exprimer les sommes suivantes en fonction de n (entier naturel non-nul) :

1.
$$T_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k+3}$$

$$T_n = 2^3 \sum_{k=1}^{n} 2^k$$

somme des termes d'une suite géométrique de raison $2 \neq 0$

$$= 2^3\, 2 \times \frac{1-2^n}{1-2}$$

$$= 16\,(2^n - 1)$$

2.
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k-1)$$

$$S_n = 2\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1$$

$$= 2\,\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$= (n+1)(n-1)$$

Exercice 2 n est un entier naturel supérieur ou égal à 10. Exprimer les produits suivants à l'aide de factorielles :

1.
$$P_n = \prod_{k=5}^{n+2} k$$

$$P_n = 5 \times 6 \times \dots \times (n+2)$$

$$= \frac{(n+2)!}{4!}$$

2.

$$Q_n = \prod_{k=3}^{n} 2k$$

$Q_n = 2^{n-3+1}\left(\prod_{k=3}^{n} k\right)$

$= 2^{n-2} \dfrac{n!}{2!}$

$= 2^{n-3} n!$

Exercice 3 Soit $z = \dfrac{1+2i}{1+i}$. Déterminer la forme algébrique de z, puis calculer son module.

$z = \dfrac{(1+2i)(1-i)}{1^2+1^2} = \dfrac{1+2+i(2-1)}{2} = +\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i$ (forme algébrique)

donc $|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Exercice 4

Soit

$$f : x \mapsto \sqrt{2+2x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f'.

① Soit $x \in \mathbb{R}$

$x \in \mathcal{D}_f \iff 2+2x \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$

Donc $\mathcal{D}_f = [-1, +\infty[$

② f est la composée de $x \mapsto 2+2x$, dérivable sur $]-1, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par $\sqrt{\ }$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc f est dérivable sur $]-1, +\infty[$

et $\forall x \in]-1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2+2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2+2x}}$