

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 4. SUJET B/A

Vendredi 10 novembre 2023.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

On considère la fonction :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1. Montrer que g est paire.
2. Montrer que g n'est pas injective.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.
4. Montrer que g n'est pas surjective.
5. Déterminer l'ensemble des antécédents de -3 .
6. Déterminer l'ensemble des antécédents de 1 .

① g est définie sur $\mathbb{R}$ donc il suffit de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = g(x)$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = g(x)$ donc g est paire.

② Puisque g est paire, par exemple $g(-2) = g(2)$
 Or $2 \neq -2$
 On en déduit que g n'est pas injective

③ $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives.
 Donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} > 0$, donc $\frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$
 Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$

④ $-3 \in \mathbb{R}$ et -3 n'a pas d'antécédent par g puisque
 $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0 > -3$
 Donc g n'est pas surjective

⑤ d'après la q°④, -3 n'a pas d'antécédent par g .
 Donc l'ensemble des antécédents de -3 par g est $\emptyset$

⑥ Ensemble des antécédents de 3 : (soit A)
On résout l'équation $f(x)=3$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x)=3 \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 6 \quad \downarrow \times e^x \quad \uparrow \times e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 6e^x + 1 = 0$$

On pose $X = e^x$. d'où $f(x)=3 \Leftrightarrow \underbrace{X^2 - 6X + 1 = 0}$
 trinôme de discriminant $\Delta = 36 - 4 = 32$
 il y a 2 racines réelles
 $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$

Ainsi, $f(x)=3 \Leftrightarrow e^x = \underbrace{3-2\sqrt{2}}_{\substack{>0 \\ \text{car c'est} \\ \sqrt{9}-\sqrt{8}}} \text{ ou } e^x = \underbrace{3+2\sqrt{2}}_{>0}$ } on applique $\ln$ } on applique $\exp$
 $\Leftrightarrow x = \ln(3-2\sqrt{2}) \text{ ou } x = \ln(3+2\sqrt{2})$

Donc l'ensemble des antécédents de 3 par f est $\{\ln(3-2\sqrt{2}), \ln(3+2\sqrt{2})\}$

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire le plus simplement possible à l'aide de puissances de 2 et/ou de 3 :

1. $A = (-3) \times 9^n$

$$A = -3 \times (3^2)^n = -3 \times 3^{2n} = -3^{2n+1}$$

2. $B = \frac{4^n}{2}$

$$B = \frac{(2^2)^n}{2} = \frac{2^{2n}}{2} = 2^{2n-1}$$

3. $C = \frac{e^{3 \ln(9) - 2 \ln(24)}}{72}$

$$C = \frac{e^{3 \ln 9}}{e^{2 \ln 24} \times 72} = \frac{9^3}{24^2 \times 2 \times 6^2} = \frac{(3^2)^3}{(2^3 \times 3)^2 \times 2 \times 3^2 \times 2^2} = \frac{3^6}{2^6 \times 3^2 \times 2^3 \times 3^2}$$

$$\text{d'où } C = \frac{3^2}{2^9}$$

⑥ Ensemble des antécédents de 1:

On résout l'équation: $g(x) = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 2 = 0 \quad \downarrow x e^x > 0 \quad \uparrow x e^{-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 2X + 1 = 0 \quad \text{On a posé } X = e^x$$

$$\Leftrightarrow (X - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 (= e^0) \quad \downarrow \text{on applique } \ln \quad \uparrow \text{on applique } \exp$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Donc l'ensemble des antécédents de 1 par g est $\{0\}$

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire le plus simplement possible à l'aide de puissances de 3 et/ou de 5 :

1. $A = \frac{9^n}{3}$

$$A = \frac{(3^2)^n}{3} = \frac{3^{2n}}{3} = 3^{2n-1}$$

2. $B = (-5) \times 25^n$

$$B = (-1) \times 5 \times (5^2)^n = (-1) \times 5 \times 5^{2n} = -5^{2n+1}$$

3. $C = \frac{e^{3 \ln(15) - 4 \ln(25)}}{75}$

$$\begin{aligned} C &= \frac{e^{3 \ln(15)}}{3 \times 25 \times e^{4 \ln(25)}} = \frac{15^3}{3 \times 5^2 \times 25^4} = \frac{(3 \times 5)^3}{3 \times 5^2 \times (5^2)^4} \\ &= \frac{3^3 \times 5^3}{3 \times 5^2 \times 5^8} = \frac{3^2}{5^7} \end{aligned}$$