

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 6. SUJET A.

Vendredi 1er décembre 2023.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' - 2y = t + 1$. On cherchera une solution particulière polynomiale.2. Déterminer la solution de cette équation différentielle vérifiant $y(0) = 1$.① (E): $y' - 2y = t + 1$ est une EDL du 1^{er} ordre sous forme résolue, définie sur $\mathbb{R}$.② Résolution de (H): $y' - 2y = 0$ elle est à coefficients constants donc l'ensemble des sol^o de (H) est

$$y_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{2t}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

③ On cherche une solution particulière de (E), sous la forme $f: t \mapsto at + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = a$.
Déterminons une CNS pour que f soit solution de (E):

 f est sol^o de (E)

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) - 2f(t) = t + 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, a - 2(at + b) = t + 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, -2at + (a - 2b) = t + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 1 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{"évident"} \end{array} \quad \downarrow \text{ par identification}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - 1) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Donc $f: t \mapsto -\frac{t}{2} - \frac{3}{4}$ est solution de (E)

④ Conclusion: l'ensemble des solutions de (E) est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \underbrace{-\frac{t}{2} - \frac{3}{4}}_{\text{sol}^o \text{ de (E)}} + \underbrace{\lambda e^{2t}}_{\text{sol}^o \text{ de (H)}}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

⑤ Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E).Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = -\frac{t}{2} - \frac{3}{4} + \lambda e^{2t}$

Puis: $f(0) = 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} + \lambda = 1$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{4}$$

Ainsi, l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$ est:

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto -\frac{t}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{4}e^{2t} \end{array}$$

Exercice 2 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$: $y' - \frac{2}{t}y = t^2 \sin(2t)$. On pourra chercher une solution particulière par la méthode de variation de la constante.

(E): $xy' - \frac{2}{x}y = x^2 \sin(2x)$ est une EDC du 1^{er} ordre sous forme résolue.

② Résolution de (H): $y' - \frac{2}{t}y = 0$

la fonction $t \mapsto -\frac{2}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle y admet des primitives.

$t \mapsto -2 \ln t$ en est une.

Donc $\mathcal{G}_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \underbrace{de^{2\ln t}}_{dt^2}, \quad d \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

⑥ Recherche d'une sol^o particulière de (E): On cherche une sol^o de (E) sous la forme $f: t \mapsto \lambda(t)t^2$, avec $\lambda: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (produit de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$)

et $\forall t \in \mathbb{R}_+^k$, $f(t) = \lambda(t)t^2 + 2t\lambda(t)$

Déterminons une cvs pour que f soit sol^o de (E) .

$$\int_{\text{de}(E)} \cos x dx^0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f'(t) \stackrel{?}{=} f(t) = t^2 \sin(2t)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(t)t^2 + 2t\lambda(t) - \underbrace{\frac{2}{t} \frac{\lambda(t)}{2}}_{=0} t^2 = t^2 \sin(2t)$$

$$(\Rightarrow) \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \lambda'(t)t^2 = t^2 \sin(2t)$$

$$x t^2 > 0 \quad \uparrow \quad \Downarrow \quad x \cdot \frac{1}{t^2} > 0$$

$$(\Leftarrow) \forall t \in \mathbb{R}_+^k, \lambda'(t) = \sin(2t)$$

La fonction $t \mapsto \sin(2t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle y admet des primitives.
 $t \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2t)$ en est une. On peut donc poser $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda(t) = -\frac{1}{2}\cos(2t)$,
 et la fonction $f: t \mapsto -\frac{t^2}{2}\cos(2t)$ est sol^o de (E)

© Conclusion: l'ensemble des sol^o de (E) est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \underbrace{-\frac{t^2}{2} \cos(2t)}_{\text{sol}^0 \text{ de } (E)} + \underbrace{\lambda t^2}_{\text{sol}^0 \text{ de } (H)}, \quad d \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 6. SUJET B.

1^{er} / 12

Vendredi 24 novembre 2023.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' + 3y = t + 1$. On cherchera une solution particulière polynomiale.2. Déterminer la solution de cette équation différentielle vérifiant $y(0) = 1$.

① (E) : $y' + 3y = t + 1$ est une EDL du 1^{er} ordre à coefficients constants, sous forme résolue, définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Résolution de l'éq° homogène (H) : $y' + 3y = 0$

$$y_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{-3t}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

(b) On recherche une solution particulière sous la forme $f: t \mapsto at + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = a$.

Déterminons une CNS par que f soit sol° de (E).

$$f \text{ est sol}^\circ \text{ de (E)} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) + 3f(t) = t + 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, a + 3at + 3b = t + 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 3at + (a + 3b) = t + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ a + 3b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Donc $f: t \mapsto \frac{1}{3}t + \frac{2}{9}$ est sol° de (E)

② Conclusion: l'ensemble des sol° de (E) est : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \underbrace{\frac{t}{3} + \frac{2}{9}}_{\text{sol}^\circ \text{ de (E)}} + \underbrace{\lambda e^{-3t}}_{\text{sol}^\circ \text{ de (H)}}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

③ Soit f une solution de (E). Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{t}{3} + \frac{2}{9} + \lambda e^{-3t}$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{9} + \lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{9}$$

Donc l'unique sol° de (E) vérifiant la cond° initiale est $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \frac{t}{3} + \frac{2}{9} + \frac{7}{9}e^{-3t}$

Exercice 2 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$: $y' + \frac{2}{t}y = \frac{\sin(2t)}{t^2}$. On pourra chercher une solution particulière par la méthode de variation de la constante.

a) (E) : $y' + \frac{2}{t}y = \frac{\sin(2t)}{t^2}$ est une EDL du 1^{er} ordre sous forme résolue.

On commence par résoudre (H) : $y' + \frac{2}{t}y = 0$

$t \mapsto \frac{2}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle y admet des primitives.

$t \mapsto 2\ln(t)$ en est une. Donc $\mathcal{Y}_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \underbrace{\lambda e^{-2\ln t}}_{\frac{\lambda}{t^2}}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

b) On cherche une sol^o particulière de (E)

sous la forme $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$t \mapsto \frac{\lambda(t)}{t^2}$, avec $\lambda: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (produit de 2 f^o dérivables : $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ et λ)

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f'(t) = \frac{\lambda'(t)}{t^2} - 2 \frac{\lambda(t)}{t^3}$$

Déterminons une cns pour que f soit sol^o de (E).

$$f \text{ est sol}^o \text{ de (E)} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f'(t) + \frac{2}{t}f(t) = \frac{\sin(2t)}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \underbrace{\frac{\lambda'(t)}{t^2} - 2 \frac{\lambda(t)}{t^3} + \frac{2}{t} \frac{\lambda(t)}{t^2}}_{=0} = \frac{\sin(2t)}{t^2}$$

$$\int \lambda'(t) dt = 0 \quad \int \frac{1}{t^2} dt > 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \lambda'(t) = \sin(2t)$$

La fonction $t \mapsto \sin(2t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle y admet des primitives - $t \mapsto -\frac{\cos(2t)}{2}$ en est une

On peut donc poser $\lambda: t \mapsto -\frac{\cos(2t)}{2}$, et alors $f: t \mapsto -\frac{\cos(2t)}{2t^2}$ est sol^o de (E)

c) Concl^o: l'ensemble des sol^o de (E) est,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \underbrace{-\frac{\cos(2t)}{2t^2}}_{\text{une sol}^o \text{ de (E)}} + \underbrace{\frac{\lambda}{t^2}}_{\text{sol}^o \text{ de (H)}}, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$