

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 5. SUJET A.

Vendredi 24 novembre 2023.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Répondre aux questions suivantes. On donnera les réponses sous forme de coefficients binomiaux (ou produits de coefficients binomiaux) ou de factorielles (ou produits de factorielles).

On ne justifiera pas les réponses.

1. Une urne contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. On tire successivement et sans remise 5 jetons de cette urne.

(a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Un tirage peut être représenté par une 5-liste sans répétition d'éléments de $\llbracket 1, 20 \rrbracket$. Il y a donc $\frac{20!}{15!} = 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16$ tirages possibles

(b) Combien y a-t-il de tirages ne contenant que des numéros pairs ?

Un tel tirage peut être représenté par une 5-liste sans répétition d'éléments de $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ - Il y a donc $\frac{10!}{5!}$ tels tirages
de cardinal 10

(c) Combien y a-t-il de tirages comportant les numéros 1, 2, 3, 4, 5 ?

Choisir un tel tirage revient à choisir une permutation de l'ensemble $\llbracket 1, 5 \rrbracket$
Il y en a donc 5!

(d) Combien y a-t-il de tirages pour lesquels les numéros sont dans l'ordre croissant ?

choisir un tel tirage revient à choisir une 5-combinaison de $\llbracket 1, 20 \rrbracket$ (il y a ensuite une seule façon d'ordonner les nombres) - Il y a donc $\binom{20}{5}$ tirages croissants.

2. Cette fois, on tire simultanément 5 jetons de cette urne.

(a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Un tirage peut être représenté par une 5-combinaison de $\llbracket 1, 20 \rrbracket$ (pas d'ordre) - Il y a donc $\binom{20}{5}$ tirages

(b) Combien y a-t-il de tirages ne comportant que des numéros inférieurs ou égaux à 8 ?

Un tel peut être représenté par une 5-combinaison de $\llbracket 1, 8 \rrbracket$.
Il y en a donc $\binom{8}{5}$

(c) Combien y a-t-il de tirages comportant exactement 2 numéros pairs et 3 impairs ?

Choisir un tel tirage revient à :

- choisir 2 numéros pairs : $\binom{10}{2}$ choix- choisir 3 numéros impairs : $\binom{10}{3}_1$ choix

} Au total, il y a $\binom{10}{2} \binom{10}{3}$ tels tirages

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 5. SUJET B.

Vendredi 24 novembre 2023.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Répondre aux questions suivantes. On donnera les réponses sous forme de coefficients binomiaux (ou produits de coefficients binomiaux) ou de factorielles (ou produits de factorielles).

*On ne justifiera pas les réponses.

1. Une urne contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. On tire simultanément 6 jetons de cette urne.

(a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Un tirage peut être représenté par une 6-combinaison de $\llbracket 1, 20 \rrbracket$
 Il y a donc $\binom{20}{6}$ tirages

(b) Combien y a-t-il de tirages ne contenant que des numéros pairs ?

Un tel tirage peut être représenté par une 6-combinaison de l'ensemble
 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ - Il y a donc $\binom{10}{6}$ tels tirages
 de cardinal 10

(c) Combien y a-t-il de tirages comportant exactement 4 numéros inférieurs ou égaux à 10 et 2 numéros strictement supérieurs à 10 ?

choisir un tel tirage, c'est :
 - choisir 4 numéros dans $\llbracket 1, 10 \rrbracket \rightarrow \binom{10}{4}$ choix
 - choisir 2 numéros dans $\llbracket 11, 20 \rrbracket \rightarrow \binom{10}{2}$ choix
 Au total, il y a $\binom{10}{4} \binom{10}{2}$ tels tirages

2. Cette fois, on tire successivement et sans remise 6 jetons de cette urne.

(a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Un tirage peut être représenté par une 6-liste sans répétition de l'ensemble $\llbracket 1, 20 \rrbracket$. Il y en a donc $\frac{20!}{14!}$

(b) Combien y a-t-il de tirages ne comportant que des numéros pairs ?

Un tel tirage peut être représenté par une 6-liste sans répétition de l'ensemble $\{2i, i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket\}$. Il y en a donc $\frac{10!}{4!}$
 de cardinal 10

(c) Combien y a-t-il de tirages comportant les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?

choisir un tel tirage revient à choisir une permutation de l'ensemble $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ - Il y en a donc $6!$

(d) Combien y a-t-il de tirages pour lesquels les numéros sont dans l'ordre croissant ?

choisir un tel tirage revient à choisir 6 numéros dans l'ensemble $\llbracket 1, 20 \rrbracket$: $\rightarrow \binom{20}{6}$ choix
 il y a ensuite une seule façon de les ordonner.
 Au total, il y a donc $\binom{20}{6}^2$ tels tirages.