CORRIGÉ

NOM : **BCPST 12**

Interrogation écrite $n^o 8$.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 8. SUJET A.

Vendredi 12 janvier 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

1. quel est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation $x^2+y^2-2x+4y+2=0$?
2. même question avec $x^2+y^2-2y+2=0$

(1) $x^2+y^2-2x+4y+2=0 \iff (x-1)^2-1+(y+2)^2-4+2=0$
$\iff (x-1)^2+(y+2)^2 = \underbrace{3}_{=\sqrt{3}^2}$

L'ensemble en question est le cercle de centre $\Omega(1,-2)$ et de rayon $\sqrt{3}$

(2) $x^2+y^2-2y+2=0 \iff x^2+(y-1)^2-1+2=0$
$\iff \underbrace{x^2+(y-1)^2}_{\geq 0} = \underbrace{-1}_{<0}$ cette équation n'a pas de solution

L'ensemble en question est $\emptyset$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x-2y-1=0$.

1. Déterminer les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$ et les coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
2. En déduire une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
3. Soit M le point de coordonnées $(1,3)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.
4. En déduire la distance de M à $\mathcal{D}$.

(1) $A(1,0) \in \mathcal{D}$ et $\vec{u}(2,1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

(2) Soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan.

$M(x,y) \in \mathcal{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 + \lambda \end{cases}$

(3) Soit $H(x,y)$ un point quelconque du plan.

H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D} \iff \begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{MH}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} x-2y-1=0 \\ 2(x-1)+y-3=0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x-2y = 1 \\ 2x+y = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-2y = 1 \\ 5y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Donc le point $H\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$ est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

(4) $d(M, \mathcal{D}) = HM$ or $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} 1-\frac{11}{5} \\ 3-\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$

donc $d(M, \mathcal{D}) = \sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\times 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 (1+4)} = \frac{6}{5}\sqrt{5} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

Exercice 3

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(1,2)$ et passant par O. Donner une équation cartésienne de ce cercle.
2. Montrer que le point $A(2,0)$ appartient à $\mathcal{C}$ et donner une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$.

(1) Soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff \Omega M = O\Omega \\ &\iff \Omega M^2 = O\Omega^2 \\ &\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1^2 + 2^2 \\ &\iff x^2 - 2x + 1^2 + y^2 - 4y + 2^2 = 1^2 + 2^2 \\ &\iff \underbrace{x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0}_{\text{équation cartésienne de } \mathcal{C}} \end{aligned}$$

(2) $2^2 + 0^2 - 2\times 2 - 4\times 0 = 0$ donc $A(2,0) \in \mathcal{C}$ (ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{C}$)

On note $\mathcal{T}$ la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$.

Elle a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc elle a une équation cartésienne de la forme $-x + 2y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Or $A(2,0) \in \mathcal{T}$ donc $-2 + 2\times 0 + c = 0$, donc $c = 2$

Ainsi, $-x + 2y + 2 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{T}$.

NOM : CORRIGÉ

BCPST 12
Interrogation écrite $n^o 8$.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 8. SUJET B.

Vendredi 12 janvier 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

1. quel est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation $x^2 + y^2 + 2x + 3 = 0$?
2. Même question avec $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$

① $x^2+y^2+2x+3=0 \iff (x+1)^2-1+y^2+3=0$

$\iff \underbrace{(x+1)^2+y^2}_{\geq 0} = \underbrace{-2}_{<0}$ cette équation n'a pas de solution.

L'ensemble en question est $\emptyset$

② $x^2+y^2+4x-6y+6=0 \iff (x+2)^2-4+(y-3)^2-9+6=0$

$\iff (x+2)^2+(y-3)^2 = \underbrace{7}_{=\sqrt{7}^2}$

L'ensemble est le cercle de centre $\Omega(-2,3)$ et de rayon $\sqrt{7}$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2x - y + 1 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$ et les coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
2. En déduire une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
3. Soit M le point de coordonnées $(3, 1)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.
4. En déduire la distance de M à $\mathcal{D}$.

① $A(0,1) \in \mathcal{D}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

② Soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan.

$M(x,y) \in \mathcal{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$

③ Soit $H(x,y)$ un point quelconque du plan.

H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D} \iff \begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$ $\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x-3+2(y-1)=0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -5y = -11 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{11}{5} \end{cases}$$

Donc le point $H\left(\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$ est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$

(4) $d(M, \mathcal{D}) = HM$ Or $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} 3 - \frac{3}{5} \\ 1 - \frac{11}{5} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$

donc $d(M, \mathcal{D}) = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6\times 2}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2(4+1)} = \frac{6}{5}\sqrt{5} \quad \left(= \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$

Exercice 3

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(2, 1)$ et passant par O. Donner une équation cartésienne de ce cercle.
2. Montrer que le point $A(0, 2)$ appartient à $\mathcal{C}$ et donner une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$.

(1) Soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan.

$$M \in \mathcal{C} \iff \Omega M = O\Omega$$
$$\iff \Omega M^2 = O\Omega^2$$
$$\iff (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2 + 1^2$$
$$\iff \underbrace{x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0}_{\text{équation cartésienne de } \mathcal{C}}$$

(2) $0^2 - 4\times 0 + 2^2 - 2\times 2 = 0$ donc $A(0,2) \in \mathcal{C}$ (ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{C}$)

On note $\mathcal{T}$ la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$.
Elle passe par $A(0,2)$ et a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc elle a une équation cartésienne de la forme :

$2x - y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Puisque $A(0,2) \in \mathcal{T}$, on a : $0 - 2 + c = 0$ donc $c = 2$

D'où : $2x - y + 2 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{T}$.