

PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 15.

Semaine du lundi 22 janvier au vendredi 26 janvier 2024.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de cours de la semaine 14. $X^n - 1 = (X - 1)(1 + X + \dots + X^{n-1})$ et $X^n - a^n = (X - a) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} X^k \right)$.
2. Montrer que $(X - a) | P \iff P(a) = 0$. On commencera par rappeler comment factoriser $X^k - 1$ et $X^k - a^k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Généralisation du résultat précédent (énoncé pour p racines deux à deux distinctes), sans démonstration. Application : factoriser $P = 2X^2 - 3X + 1$.
4. Montrer - en citant précisément le résultat utilisé - que si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels qu'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts tels que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_i) = Q(a_i)$, alors $P = Q$.
5. Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme. Exemple ! $P = (X + 2)(X - 3)^2(X + 1)^5$.
6. Proposition $(X - a)^k$ divise P si et seulement si... (sans démonstration). Application : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $nX^{n+2} - (n + 2)X^{n+1} + (n + 2)X - n$ est divisible par $(X - 1)^3$.

Thème de la colle :

CALCULS

Poser un exercice de la liste «EXOS-CHRONOS 7». L'exercice doit être fait en moins de 4 minutes.

POLYNÔMES

Ensemble des polynômes

Définitions. Notation $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$. Si $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = Q(x)$, alors P et Q ont les mêmes coefficients. Opérations dans $\mathbb{K}[X]$: combinaison linéaire, produit, composition, dérivation.

Racines d'un polynôme, divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$.

Divisibilité : définition. $(X - a)$ divise P si, et seulement si, $P(a) = 0$. Généralisation de ce résultat à p racines deux à deux distinctes. Corollaire : un polynôme non-nul de degré $\leq n$ possède au plus n racines. Racines multiples : ordre de multiplicité d'une racine. $(X - a)^k$ divise P si, et seulement si, $P(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$.