

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 9. SUJET A.

Vendredi 19 janvier 2024.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant des polynômes suivants :

1. $P = (2X - 1)^6 - 64X^6$

2. $Q = (X - 2)^n - X^n$

3. $R = (X + 1)^{2n} - X^{2n}$

1 D'après la formule de binôme,

$$(2x-1)^6 = (2x)^6 - 6(2x)^5 + Q \quad \text{avec } Q \text{ un polynôme de degré } \leq 4$$

$$\text{Donc } P = -192X^5 + Q \quad (\text{car } 2^6 = 64)$$

Donc P est de degré 5 et son coefficient dominant est -192De plus, $P(0) = (-1)^6 = 1$ donc le coefficient constant est 1.

2 $(X-2)^n = X^n + n \times (-2)X^{n-1} + Q_1$ avec Q_1 polynôme de degré $\leq n-2$

$$\text{Donc } Q = -2nX^{n-1} + Q_1, \text{ avec } -2n \neq 0$$

Donc Q est de degré $n-1$ et son coefficient dominant est $-2n$ De plus, $Q(0) = (-2)^n$ donc le coefficient constant est $(-2)^n$

3 $(X+1)^{2n} = X^{2n} + 2nX^{2n-1} + Q$, avec Q un polynôme de degré $\leq 2n-2$

$$\text{donc } R = 2nX^{2n-1} + Q, \text{ avec } 2n \neq 0$$

Donc R est de degré $2n-1$ et son coefficient dominant est $2n$ De plus, $R(0) = 1$ donc le coefficient constant est 1.

Exercice 2

On pose $P = X^2 + 3$ et $Q = X^3 - X + 2$. Déterminer $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

$$P \circ Q = (X^3 - X + 2)^2 + 3 = (X^3)^2 + X^2 + 2^2 - 2X^4 + 4X^3 - 4X + 3$$

$$\text{donc } P \circ Q = X^6 - 2X^4 + 4X^3 + X^2 - 4X + 7$$

$$Q \circ P = (X^2 + 3)^3 - (X^2 + 3) + 2 = (X^2)^3 + 3 \times 3 \times (X^2)^2 + 3 \times 3^2 (X^2) + 3^3 - X^2 - 3 + 2$$

$$\text{Donc } Q \circ P = X^6 + 9X^4 + 26X^2 + 26$$

Exercice 3

Développer : $(1 - X)^5$

D'après la formule du binôme :

$$(1 - X)^5 = 1 - 5X + 10X^2 - 10X^3 + 5X^4 - X^5$$

masse du soluté

$$0,20 \rightarrow 0,020$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 9. SUJET B.

Vendredi 19 janvier 2024.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant des polynômes suivants :

1. $P = (2X + 1)^5 - 32X^5$

2. $Q = (X + 2)^n - X^n$

3. $R = (X - 1)^{2n} - X^{2n}$

1. D'après la formule du binôme, $P = (2X)^5 + 5 \times (2X)^4 + Q - 32X^5$
 Avec Q un polynôme de degré 3
 Donc $P = 80X^4 + Q$
 On en déduit $\deg P = 4$ et le coefficient dominant est 80.
 De plus, $P(0) = 1$ donc le coefficient constant de P est 1.
2. D'après la formule du binôme, $(X+2)^n = X^n + 2nX^{n-1} + Q_1$
 avec Q_1 un polynôme de degré $\leq n-2$
 Donc $Q = 2nX^{n-1} + Q_1$
 Puisque $2n \neq 0$, on en déduit $\deg Q = n-1$ et son coefficient dominant est $2n$.
 De plus, $Q(0) = 2^n$ donc le coefficient constant est 2^n .
3. D'après la formule du binôme $(X-1)^{2n} = X^{2n} - 2nX^{2n-1} + R_1$
 avec R_1 un polynôme de degré $\leq 2n-2$
 Donc $R = -2nX^{2n-1} + R_1$
 Puisque $-2n \neq 0$, on en déduit que R est de degré $2n-1$ et que son coefficient dominant est $-2n$.
 De plus, $R(0) = (-1)^{2n} = 1$ donc le coefficient constant est 1.

Exercice 2

On pose $P = X^2 - 3$ et $Q = X^3 + X + 2$. Déterminer $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

$$P \circ Q = (X^3 + X + 2)^2 - 3 = X^6 + X^2 + 4 + 2X^4 + 4X^3 + 4X - 3$$

$$\text{donc } P \circ Q = X^6 + 2X^4 + 4X^3 + X^2 + 4X + 1$$

$$Q \circ P = (X^2 - 3)^3 + (X^2 - 3) + 2 = X^6 - 3 \times 3 \times X^4 + 3 \times 3^2 X^2 - 3^3 + X^2 - 3 + 2$$

$$\text{donc } Q \circ P = X^6 - 9X^4 + 27X^2 - 28$$

Exercice 3

Développer : $(1 - X)^6$

$$(1 - X)^6 = 1 - 6X + 15X^2 - 20X^3 + 15X^4 - 6X^5 + X^6$$