Programme de colle de la semaine 15.

Semaine du lundi 29 janvier au vendredi 2 février 2023.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de cours de la semaine 15.
2. Formules de trigonométrie : $\cos(a+b), \cos(a-b),\ \cos 2a$, $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\sin 2a$, $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$, $\tan 2a$, $\cos^2 a$, $\sin^2 a$.
3. Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes. On soignera la rédaction.
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^3+2n-1}{2n^3+5n+2}$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = n^2 - \ln(n^{10})$.
4. Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes. On soignera la rédaction.
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{e^{-n}}{n^4+2}$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = n+2+\dfrac{(-1)^n}{n}$.
5. Énoncer (sans démonstration) la proposition de passage à la limite dans une inégalité. Montrer par un exemple qu'on ne peut pas remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes.
6. Théorème d'existence de limite par encadrement ("théorème des gendarmes") : énoncé sans démonstration. Exemple : déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
7. Extension du résultat précédent aux limites infinies : théorème de comparaison. Énoncé sans démonstration. Exemple : déterminer la limite de la suite $\left(\sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
8. Définition de plus grand élément, plus petit élément, borne supérieure, borne inférieure. Exemples (sans justification précise).

Thème de la colle :

CALCULS
Calculs de limites de suites.

SUITES RÉELLES
Définitions
Définitions et notations. Propriété vraie à partir d'un certain rang. Suites majorées, minorées, bornées.
Convergence, divergence
Suite convergente : définition. Exemple. Unicité de la limite. Limites infinies : définition. Exemple. Résultats généraux : (u_n) a pour limite ℓ ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont pour limite ℓ. Application : $((-1)^n)$ n'a pas de limite. Le produit d'une suite bornée et d'une suite que tend vers 0 est une suite qui tend vers 0. Toute suite convergente est bornée. Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ apcr.
Opérations sur les limites
Somme, produit, quotient.
Limites et inégalités
Passage à la limite dans une inégalité. Théorème de limite par encadrement. Extension aux limites infinies (comparaison).
Le théorème de composition des limites peut être aussi utilisé en exercice.
Borne supérieure, borne inférieure
Majorant, minorant. Plus grand élément, plus petit élément. Borne supérieure, borne inférieure.
Suites monotones.
Définition. Théorème de la limite monotone.