

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 10. SUJET A.

Vendredi 2 février 2024. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 : Déterminer la limite de chacune des suites :

1. $a_n = \frac{3n^3 - 6n + 1}{n^3 + 1}$

après, $a_n = \frac{3n^3(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{3n^3})}{n^3(1 + \frac{1}{n^3})} = 3 \frac{(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{3n^3})}{1 + \frac{1}{n^3}}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par opérations usuelles sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{3n^3} = 1$
 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n^3} = 1$. Ainsi, par produit et quotient des limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3}$$

2. $b_n = \ln(n^3) - \sqrt{n}$

après, $b_n = 3\ln n - \sqrt{n} = -\sqrt{n} \left(1 - 3\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0 \text{ parce que } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 3\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 1$$

Donc par produit des limites, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty}$

3. $c_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est le produit d'une suite bornée, $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et d'une suite qui tend vers 0, $(\sin(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0}$

4. $d_n = 3^n - 2^n$

après, $d_n = 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

$$\left|\frac{2}{3}\right| < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ - Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$$

$$3 > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$$

Par produit des limites, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty}$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 10. SUJET B.

Vendredi 2 février 2024. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 : Déterminer la limite de chacune des suites :

1. $a_n = 2\sqrt{n} - \ln(n^2)$

après, $a_n = 2\sqrt{n} - 2\ln n = 2\sqrt{n} \left(1 - \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0 \text{ parce que } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 1$$

Donc par produit des limites, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty}$

2. $b_n = \frac{3n^3 - 6n + 1}{n^2 + 1}$

après, $b_n = \frac{3n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{3n^3}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 3n \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{3n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc par produit et somme des limites, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{3n^3} = 1$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$ - Et par produit et quotient des limites, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty}$

3. $c_n = 3^n - 5^n$

après, $c_n = -5^n \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$

$$\left|\frac{3}{5}\right| < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n = 1$$

et $5 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -\infty}$

4. $d_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(d_n) est le produit d'une suite bornée, $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et d'une suite qui tend vers 0, $(\sin(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0}$

Exercice 2 : On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,8 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n^2 \end{cases}$$

On a représenté ci-dessous le graphe de la fonction $f : x \mapsto 1 - x^2$.

Tracer u_0, u_1, u_2 sur l'axe des abscisses. On fera apparaître les traits de construction :

