

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 11. SUJET A.

Vendredi 9 février 2024.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 : Déterminer un équivalent le plus simple possible des suites suivantes et en déduire leur limite :

1. $a_n = \sqrt{n}(\ln n)^5 - n^2 \sqrt{\ln(n)}$

après, $a_n = -n^2 \sqrt{\ln(n)} \left[1 - \frac{(\ln n)^{\frac{9}{2}}}{n^3} \right]$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^{\frac{9}{2}}}{n^3} = 0$ par cc donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{(\ln n)^{\frac{9}{2}}}{n^3} = 1$

Donc $a_n \sim -n^2 \sqrt{\ln n}$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 \sqrt{\ln n} = -\infty$, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

2. $b_n = n^2 \sin(e^{-n})$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ donc $\sin(e^{-n}) \sim e^{-n}$

Donc par produit des équivalents, $b_n \sim n^2 e^{-n}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-n} = 0$ (par cc), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$

3. $c_n = \frac{3n^5 - 2n^2 + 1}{5n^3 + 8n + 9}$

$3n^5 - 2n^2 + 1 \sim 3n^5$ (polynômes)
 $5n^3 + 8n + 9 \sim 5n^3$

Donc par quotient des équivalents, $c_n \sim \frac{3n^2}{5}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{5} = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$

Exercice 2 : python

On considère la suite définie par :

$$u_2 = 1, u_3 = 5 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + u_n$$

1. Écrire une fonction python qui prend comme argument d'entrée un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie le terme u_n de la suite.

```
def suite(n):  
    u, v = 1, 5  
    for i in range(3, n+1):  
        u, v = v, 3*v + u  
    return u
```

2. On considère la fonction :

```
1 def suite(n):  
2     u, v = 1, 5  
3     for i in range(n+1):  
4         u, v = v, 3*v + u  
5     return u
```

Quel terme de la suite cette fonction renvoie-t-elle ?

$suite(n)$ renvoie u_{n+3}

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 11. SUJET B.

Vendredi 9 février 2024.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 : Déterminer un équivalent le plus simple possible des suites suivantes et en déduire leur limite :

1. $a_n = n^3 \sin(e^{-n})$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0 \text{ donc } \sin(e^{-n}) \sim e^{-n}$$

donc par produit des équivalents, $n^3 \sin(e^{-n}) \sim n^3 e^{-n}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 e^{-n} = 0$ parce, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \sin e^{-n} = 0$

2. $b_n = \frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{5n^3 + 8n + 9}$

$$\left. \begin{array}{l} 3n^4 - 2n^2 + 1 \sim 3n^4 \\ 5n^3 + 8n + 9 \sim 5n^3 \end{array} \right\} \text{ (polynômes, qd } n \rightarrow +\infty)$$

donc par quotient des équivalents, $b_n \sim \frac{3n}{5}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{5} = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$

3. $a_n = \sqrt{n}(\ln n)^5 - n^2 \sqrt{\ln(n)}$

après, $a_n = -n^2 \sqrt{\ln(n)} \left[1 - \frac{(\ln n)^{\frac{9}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} \right]$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^{\frac{9}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} = 0$ parce, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{(\ln n)^{\frac{9}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} = 1$

Donc $a_n \sim -n^2 \sqrt{\ln(n)}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 \sqrt{\ln(n)} = -\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

Exercice 2 : python

On considère la suite définie par :

$$u_3 = 1, u_4 = 5 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + u_n$$

1. Écrire une fonction python qui prend comme argument d'entrée un entier n supérieur ou égal à 3 et qui renvoie le terme u_n de la suite.

```
def suite(n):  
    u, v = 1, 5  
    for i in range(4, n+1):  
        u, v = v, 3*v + u  
    return u
```

2. On considère la fonction :

```
1 def suite(n):  
2     u, v = 1, 5  
3     for i in range(n):  
4         u, v = v, 3 * v + u  
5     return u
```

Quel terme de la suite cette fonction renvoie-t-elle ?

À l'initialisation, la variable u vaut u_3

Après n opérations, elle vaut u_{n+3}

donc $\text{suite}(n)$ renvoie u_{n+3}