

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 12. SUJET A.

Vendredi 1er mars 2024.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Déterminer un équivalent (le plus simple possible) des expressions suivantes au voisinage indiqué :

1. $4x^2 + 3x^5$ en $+\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{au } V(+\infty), \quad 4x^2 + 3x^5 = 3x^5 \left[1 + \frac{4}{3x^3} \right] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{4}{3x^3} = 1 \end{array} \right.$$

donc $4x^2 + 3x^5 \underset{+\infty}{\sim} 3x^5$

2. $4x^2 + 3x^5$ en 0

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{au } V(0), \quad 4x^2 + 3x^5 = 4x^2 \left[1 + \frac{3}{4}x^3 \right] \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{3}{4}x^3 = 1 \end{array} \right.$$

donc $4x^2 + 3x^5 \underset{0}{\sim} 4x^2$

3. $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4}$ en $+\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{au } V(+\infty), \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} = \frac{2}{x} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{1}{x^3} \right] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{x^3} = 1 \end{array} \right.$$

donc $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$

4. $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4}$ en 0

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{au } V(0), \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} = -\frac{3}{x^4} \left[1 - \frac{2}{3}x^3 \right] \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{2}{3}x^3 = 1 \end{array} \right.$$

donc $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} \underset{0}{\sim} -\frac{3}{x^4}$

5. $\ln(3x^2 + 1)$ en $+\infty$.

$$\begin{aligned} \text{car } \forall (+\infty), \ln(3x^2 + 1) &= \ln\left(3x^2 \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)\right) = \ln 3 + 2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{3x^2}\right) \\ &= 2\ln x \left[1 + \frac{\ln 3}{2\ln x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)}{2\ln x} \right] \end{aligned}$$

$\xrightarrow{0}$ $\xrightarrow{0}$
 par quotient des limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{\ln 3}{2\ln x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)}{2\ln x} \right] = 1$$

donc $\ln(3x^2 + 1) \sim 2\ln x$

6. $\ln(3x^2 + 1)$ en 0.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 0 \\ \ln(1+y) \sim y \end{cases}$$

donc par substitution, $\ln(1+3x^2) \sim 3x^2$

7. $x^{\frac{3}{x}} - 1$ en $+\infty$

$$\text{car } \forall (+\infty), x^{\frac{3}{x}} - 1 = e^{\frac{3\ln x}{x}} - 1$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\ln x}{x} &= 0 \text{ par CC} \\ e^y - 1 &\sim y \end{aligned} \right\} \text{ donc par substitution,}$$

$$e^{\frac{3\ln x}{x}} - 1 \sim \frac{3\ln x}{x}$$

8. $x^3 - 1$ en 1

$$f(x) = x^3 - 1$$

On pose $x = 1+h$ avec $h \rightarrow 0$

$$f(1+h) = (1+h)^3 - 1 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1 = 3h + 3h^2 + h^3$$

Donc $f(1+h) \sim 3h$ (polynôme, en 0)

ceci signifie que:

$$f(x) \sim 3(x-1)$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 12. SUJET B.

Vendredi 1er mars 2024.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Déterminer un équivalent (le plus simple possible) des expressions suivantes au voisinage indiqué :

1. $3x^2 + 4x^5$ en 0

$$\begin{cases} \text{au } V(0), & 3x^2 + 4x^5 = 3x^2 \left[1 + \frac{4}{3}x^3 \right] \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{4}{3}x^3 = 1 \end{cases}$$

donc $3x^2 + 4x^5 \underset{0}{\sim} 3x^2$

2. $3x^2 + 4x^5$ en $+\infty$

$$\begin{cases} \text{au } V(+\infty), & 3x^2 + 4x^5 = 4x^5 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{1}{x^3} \right] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{4} \frac{1}{x^3} = 1 \end{cases}$$

donc $3x^2 + 4x^5 \underset{+\infty}{\sim} 4x^5$

3. $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4}$ en 0

$$\begin{cases} \text{au } V(0), & \frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} = -\frac{3}{x^4} \left[1 - \frac{2}{3}x^3 \right] \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{2}{3}x^3 = 1 \end{cases}$$

donc $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} \underset{0}{\sim} -\frac{3}{x^4}$

4. $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4}$ en $+\infty$

$$\begin{cases} \text{au } V(+\infty), & \frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} = \frac{2}{x} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{1}{x^3} \right] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{x^3} = 1 \end{cases}$$

donc $\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$

5. $\ln(2x^3 + 1)$ en 0.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} 2x^3 = 0 \\ \ln(1+y) \underset{0}{\sim} y \end{cases}$$

donc par substitution, $\boxed{\ln(1+2x^3) \underset{0}{\sim} 2x^3}$

6. $\ln(2x^3 + 1)$ en $+\infty$.

$$\begin{cases} \text{au } V(+\infty), \ln(2x^3 + 1) = \ln\left(2x^3\left(1 + \frac{1}{2x^3}\right)\right) = \ln 2 + 3\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{2x^3}\right) \\ = 3\ln x \left[1 + \underbrace{\frac{\ln 2}{3\ln x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\ln(1 + \frac{1}{2x^3})}{3\ln x}}_{\rightarrow 0} \right] \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{par quotient des limites}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{\ln 2}{3\ln x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{2x^3})}{3\ln x} \right] = 1$$

donc $\ln(2x^3 + 1) \underset{+\infty}{\sim} 3\ln x$

7. $x^3 - 1$ en 1

On pose $f(x) = x^3 - 1$, et $x = 1+h$, avec $h \rightarrow 0$

$$f(1+h) = (1+h)^3 - 1 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1 = 3h + 3h^2 + h^3$$

donc $f(1+h) \underset{0}{\sim} 3h$ (polynôme en 0)

donc $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} 3(x-1)}$

8. $x^x - 1$ en 0

$$x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \text{ par CC} \\ e^y - 1 \underset{0}{\sim} y \end{cases}$$

donc par substitution, $\boxed{e^{x \ln x} - 1 \underset{0}{\sim} x \ln x}$