Programme de colle de la semaine 23 (2 pages).

Semaine du mardi 2 avril au vendredi 5 avril 2024.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de cours de la semaine 22.
2. Montrer que si X suit la loi binomiale de paramètres n, p, alors $E(X) = np$ (on pourra admettre un lemme du cours, à énoncer précisément).
3. En admettant le théorème de transfert montrer que si X et Y sont deux VAR indépendantes, alors E(XY)=E(X)E(Y).
4. En admettant la linéarité de l'espérance et la propriété précédente, montrer que si X et Y sont deux VAR indépendantes, alors V(X+Y)=V(X)+V(Y).
5. Définition de fonction continue en un point, de fonction prolongeable par continuité en un point. Exemple : montrer que $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.
6. Montrer que
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$
est continue sur $\mathbb{R}$. On précisera oralement la méthode pour traiter ce type de fonctions.
7. Théorème des valeurs intermédiaires : énoncé sans démonstration. Illustration graphique. Remarques. Application : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f admet au-moins un point fixe.
8. Théorème de la bijection : énoncé.

- Si le tableau de variation de f est : $\begin{array}{|c|ccc|} \hline x & a & & b \\ \hline & & & d \\ f & & \nearrow & \\ & c & & \\ \hline \end{array}$ alors celui de f^{-1} est :

ici, on peut poser $I =$
alors $f(I) =$

- Si le tableau de variation de f est : $\begin{array}{|c|ccc|} \hline x & a & & b \\ \hline & c & & \\ f & & \searrow & \\ & & & d \\ \hline \end{array}$ alors celui de f^{-1} est :

ici, on peut poser $I =$
alors $f(I) =$

Thème de la colle :

CALCULS : exos-chronos 8. L'exercice doit être fait en moins de 3 minutes

ESPACES PROBABILISÉS FINIS
Tout le cours (voir programme de colle de la semaine 22)

VARIABLES ALÉATOIRES

Variables aléatoires réelles
Définition. Exemples. Loi de probabilité d'une VAR. Représentation d'une loi de probabilité. Système complet associé à une VAR. Fonction de répartition.

Lois usuelles
Loi certaine. Loi uniforme. Loi de Bernoulli. Loi binomiale.

Espérance et moment
Espérance : définition, exemples. Théorème de transfert (espérance d'une composée). Moment d'ordre r. Variance. Écart-type. Exemple illustrant que la variance et l'écart-type mesurent la dispersion d'une VAR autour de son espérance. Variable aléatoire réduite, centrée réduite associée à une VAR. Formule de Koenig-Huygens.Formule de Bienayme-Tchebytchev.

Espérance et variance des lois usuelles
Loi certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli, (loi binomiale : pas encore vue).
Variables aléatoires indépendantes
Définition. Si $X(\Omega) = \{x_1, ...x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, ...y_m\}$, représentation des $P(X = x_i \cap Y = y_j)$ dans un tableau. Exemples.
Propriétés : si X et Y sont indépendantes, alors E(XY)=E(X)E(Y) et V(X+Y)=V(X)+V(Y).
Indépendance mutuelle de n VAR. Généralisation des propriétés précédentes au cas de n VAR mutuellement indépendantes.