

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 16 - SUJET A - VENDREDI 5 AVRIL 2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Une urne contient 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2 et 3 jetons numérotés 3. On effectue 2 tirages sans remise dans cette urne. On note X le numéro du premier jeton et Y le plus grand des deux numéros tirés.

1. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Déterminer $P(Y=3)$.
3. Que vaut $P(Y=1)$? En déduire la loi de Y . On la présentera dans un tableau.

$$\textcircled{1} \begin{cases} X(x) = \{1, 2, 3\} \\ P(X=1) = \frac{1}{6}, \quad P(X=2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(X=3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit :

$$E(X) = 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3) \\ = \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } E(X) = \frac{7}{3}$$

et on calcule $V(X)$ par la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$\text{avec } E(X^2) = 1^2 P(X=1) + 2^2 P(X=2) + 3^2 P(X=3) \quad \left(\begin{array}{l} \text{théorème de transfert} \\ \text{avec la fonction } t \mapsto t^2 \end{array} \right) \\ = \frac{1}{6} + 4 \times \frac{2}{6} + 9 \times \frac{3}{6} = 6$$

$$\text{donc } V(X) = 6 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{54}{9} - \frac{49}{9}$$

$$\text{donc } V(X) = \frac{5}{9}$$

$\textcircled{2}$ On calcule $P(Y=3)$ par la formule des probabilités totales avec le système complet $((X=1), (X=2), (X=3))$ vérifiant $\forall i \in \{1, 2, 3\}, P(X=i) \neq 0$:

$$P(Y=3) = \underbrace{P(X=1)}_{\frac{1}{6}} \underbrace{P(Y=3|X=1)}_{\frac{3}{5}} + \underbrace{P(X=2)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{P(Y=3|X=2)}_{\frac{3}{5}} + \underbrace{P(X=3)}_{\frac{1}{2}} \underbrace{P(Y=3|X=3)}_1 \\ = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \text{donc } P(Y=3) = \frac{4}{5}$$

- ③ $P(Y=1) \neq 0$ car le tirage est sans remise et l'urne ne contient qu'une seule boule numérotée 1, les autres ayant un numéro strictement supérieur à 1.

$$Y(\Omega) = \{2, 3\}$$

On a déjà calculé $P(Y=3)$ - Donc $P(Y=2) = 1 - P(Y=3) = \frac{4}{5}$

Loi de Y :

y	2	3
$P(Y=y)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 16 - SUJET B - VENDREDI 5 AVRIL 2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Une urne contient 3 jetons numérotés 1, 2 jetons numérotés 2 et 1 jeton numéroté 3. On effectue 2 tirages sans remise dans cette urne. On note X le numéro du premier jeton et Y le plus petit des deux numéros tirés.

1. Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Déterminer $P(Y=1)$.
3. Que vaut $P(Y=3)$? En déduire la loi de Y . On la présentera dans un tableau.

① loi de X :

• univers image: $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$$• P(X=1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(X=2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(X=3) = \frac{1}{6}$$

$$\text{On en déduit: } E(X) = 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3) \\ = \frac{3}{6} + 2 \times \frac{2}{6} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{6}$$

$$\text{donc } E(X) = \frac{5}{3}$$

On calcule $V(X)$ par la formule de Koenig-Huygens: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$\text{avec } E(X^2) = 1^2 P(X=1) + 2^2 P(X=2) + 3^2 P(X=3) \quad [\text{théorème de transfert avec la fonction } t \mapsto t^2] \\ = 1 \times \frac{3}{6} + 4 \times \frac{2}{6} + 9 \times \frac{1}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$\text{Donc } V(X) = \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{30}{9} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$$

$$V(X) = \frac{5}{9}$$

② On calcule $P(Y=1)$ par la formule des probabilités totales avec le système complet $((X=1), (X=2), (X=3))$ vérifiant $\forall i \in \{1, 2, 3\}, P(X=i) \neq 0$:

$$P(Y=1) = \underbrace{P(X=1)}_{\frac{1}{2}} \underbrace{P(Y=1|X=1)}_1 + \underbrace{P(X=2)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{P(Y=1|X=2)}_{\frac{2}{3}} + \underbrace{P(X=3)}_{\frac{1}{6}} \underbrace{P(Y=1|X=3)}_{\frac{3}{5}} \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \text{donc } P(Y=1) = \frac{4}{5}$$

③ $P(Y=3)=0$ car le tirage est sans remise et l'urne ne contient qu'un seul jeton numéroté 3, les autres ayant un numéro strictement inférieur à 3.

Loi de Y :

$$Y(\Omega) = \{1, 2\}$$

On a déjà calculé : $P(Y=1) = \frac{4}{5}$

On en déduit : $P(Y=2) = 1 - P(Y=1)$

$$\text{donc } P(Y=2) = \frac{1}{5}$$

y	<u>1</u>	2
$P(Y=y)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$