

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 13. SUJET A.

Vendredi 15 mars 2024.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Calculer la limite quand x tend vers 0 des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{1 - e^{2x} - \ln(1 - 2x)}{x^3}$

Le dénominateur est x^3 : on effectue un DL à l'ordre 3 du numérateur.
 $1 - e^{2x} - \ln(1 - 2x) \underset{0}{=} \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

Ce développement limité est non-nul, on peut donc en déduire un équivalent :

$$1 - e^{2x} - \ln(1 - 2x) \underset{0}{\sim} \frac{4}{3}x^3$$

Puis, par quotient des équivalents,

$$\frac{1 - e^{2x} - \ln(1 - 2x)}{x^3} \underset{0}{\sim} \frac{4}{3}.$$

On en déduit : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{4}{3}}.$

2. $g : x \mapsto \frac{\sqrt{1 - 4x^2} - \cos(2x)}{x^3}$

De même, on effectue un DL à l'ordre 3 du numérateur.

$$\sqrt{1 - 4x^2} - \cos(2x) \underset{0}{=} o(x^3).$$

On multiplie par $\frac{1}{x^3}$ (y compris dans le "o") :

$$\frac{\sqrt{1 - 4x^2} - \cos(2x)}{x^3} \underset{0}{=} o(1).$$

Cela veut dire que la fonction tend vers 0. Ainsi : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0}.$

Exercice 2

Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de $h : x \mapsto \ln(1 + \sin(x)) - \cos(2x)$

Par opérations sur les développements limités, on trouve :

$$\ln(1 + \sin(x)) - \cos(2x) \underset{0}{=} -1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On suppose que f admet un développement limité en 0 qui est : $f(x) \underset{0}{=} -1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - 2x^3 + o(x^3)$.

1. Déterminer (sans justifier) l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
2. Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
3. Dessiner l'allure de la courbe au voisinage du point d'abscisse 0.

1. $y = -1 + \frac{x}{2}$ est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

2. Position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente :

D'après le DL, on a : $f(x) - (-1 + \frac{x}{2}) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} - 2x^3 + o(x^3)$.

Ce DL est non-nul, on en déduit un équivalent (le premier terme non-nul du DL) :

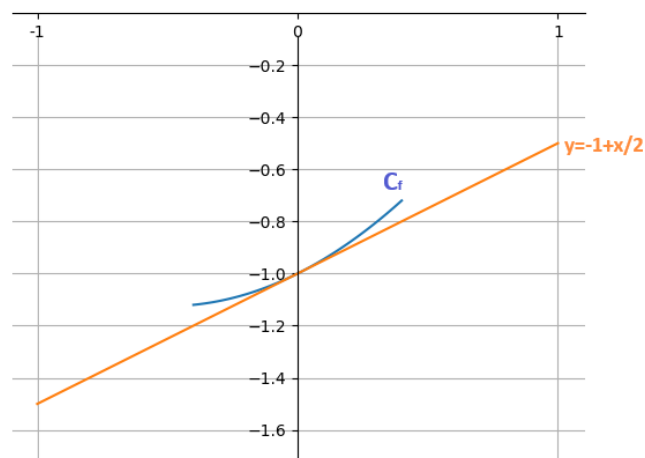
$$f(x) - (-1 + \frac{x}{2}) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Donc $f(x) - (-1 + \frac{x}{2})$ est du signe de $\frac{x^2}{2}$ au voisinage de 0.

Or au voisinage de 0, $\frac{x^2}{2} \geq 0$. Donc $f(x) - (-1 + \frac{x}{2}) \geq 0$.

Donc au voisinage de 0, $f(x) \geq -1 + \frac{x}{2}$. Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

3. On en déduit l'allure de la courbe au voisinage du point d'abscisse 0 :



Exercice 4

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On suppose que g admet un développement limité en 2 qui est : $g(2+h) \underset{0}{=} 1 - 2h + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + o(h^4)$.

1. $y = 1 - 2(x - 2)$ est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2.

2. On déduit du DL que $g(2+h) - (1 - 2h) \underset{0}{=} \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + o(h^4)$.

Ce développement limité est non-nul, donc on en déduit un équivalent (premier terme non-nul du DL) :

$$g(2+h) - (1 - 2h) \underset{0}{\sim} \frac{h^3}{3}.$$

$$\text{Donc } g(x) - (1 - 2(x - 2)) \underset{2}{\sim} \frac{(x - 2)^3}{3}.$$

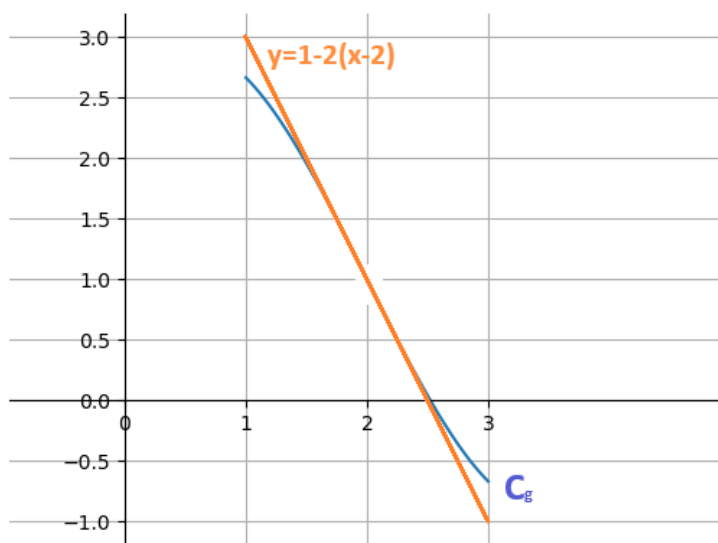
Donc au voisinage de 2, $g(x) - (1 - 2(x - 2))$ est du signe de $\frac{(x - 2)^3}{3}$. Ainsi :

À droite de 2 : $x > 2$ donc $\frac{(x - 2)^3}{3} > 0$, donc $g(x) - (1 - 2(x - 2)) > 0$, donc $\mathcal{G}_g$ est au-dessus de sa tangente.

À gauche de 2 : $x < 2$ donc $\frac{(x - 2)^3}{3} < 0$, donc $g(x) - (1 - 2(x - 2)) < 0$, donc $\mathcal{G}_g$ est en-dessous de sa tangente.

3. On en déduit l'allure de la courbe au voisinage du point d'abscisse 2 :

Attention, la tangente passe par le point de coordonnées (2, 1) et a pour coefficient directeur -2.



INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 13. SUJET B.

Vendredi 15 mars 2024.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1Calculer la limite quand x tend vers 0 des fonctions suivantes :

$$1. f : x \mapsto \frac{\cos(x) - \sqrt{1 - 4x^2}}{x^3}$$

Puisque le dénominateur est x^3 et qu'on cherche la limite en 0 (qui est indéterminée), on effectue un DL en 0 du numérateur, à l'ordre 3 :

$$\cos(x) - \sqrt{1 - 4x^2} = {}_0\frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

Ce DL est non-nul, on en déduit un équivalent : $\cos(x) - \sqrt{1 - 4x^2} \underset{0}{\sim} \frac{3}{2}x^2$.

D'où, par quotient des équivalents : $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{3}{2x}$

• Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{2x} = +\infty$, donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}$.

• Et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{2x} = -\infty$, donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty}$.

f a une limite à droite et une limite à gauche différentes en 0, donc f n'a pas de limite en 0.

$$2. g : x \mapsto \frac{e^{2x} + \ln(1 - 2x) - 1}{x^3}$$

De-même que précédemment, on effectue un développement limité d'ordre 3 en 0 du numérateur :

$$e^{2x} + \ln(1 - 2x) - 1 = {}_0-\frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

Ce développement limité est non-nul, on en déduit un équivalent : $e^{2x} + \ln(1 - 2x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{4}{3}x^3$

Puis, par quotient des équivalents, $g(x) \underset{0}{\sim} -\frac{4}{3}$.

On en déduit $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\frac{4}{3}}$.

Exercice 2

Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de $h : x \mapsto \exp(\sin(x)) - \ln(1 + 2x)$

Par opérations usuelles sur les développements limités :

$$\exp(\sin(x)) - \ln(1 + 2x) \underset{0}{=} 1 - x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

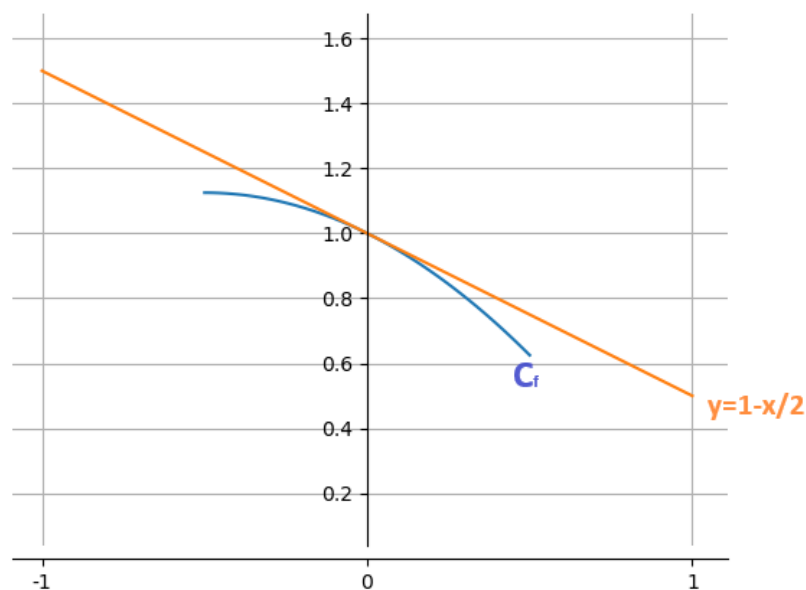
Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On suppose que f admet un développement limité en 0 qui est : $f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - 2x^3 + o(x^3)$.

1. $y = 1 - \frac{x}{2}$ est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
2. $f(x) - (1 - \frac{x}{2}) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} - 2x^3 + o(x^3)$. Ce développement limité est non-nul, donc on en déduit l'équivalent : $f(x) - (1 - \frac{x}{2}) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

Donc au voisinage de 0, $f(x) - (1 - \frac{x}{2})$ est du signe de $-\frac{x^2}{2}$. Puisque $-\frac{x^2}{2} \leq 0$, on a $f(x) - (1 - \frac{x}{2}) \leq 0$. Donc $\mathcal{C}$ est en-dessous de sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0.

3. On en déduit l'allure de la courbe au voisinage du point d'abscisse 0 :



Exercice 4

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On suppose que g admet un développement limité en 1 qui est : $g(1+h) \underset{0}{=} -1 + 2h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{4} + o(h^4)$.

1. $y = -1 + 2(x - 1)$ est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

2. $g(1+h) - (-1 + 2h) \underset{0}{=} \frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{4} + o(h^4)$.

Ce développement limité est non-nul, on en déduit un équivalent (premier terme non-nul du DL) :

$$g(1+h) - (-1 + 2h) \underset{0}{\sim} \frac{h^3}{3}. \text{ Donc } g(x) - (-1 + 2(x-1)) \underset{1}{\sim} \frac{(x-1)^3}{3}.$$

Donc $g(x) - (-1 + 2(x-1))$ est du signe de $\frac{(x-1)^3}{3}$. Ainsi :

À droite de 1 : $x > 1$ donc $\frac{(x-1)^3}{3} > 0$, donc $g(x) > -1 + 2(x-1)$. Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente.

À gauche de 1 : $x < 1$ donc $\frac{(x-1)^3}{3} < 0$, donc $g(x) < -1 + 2(x-1)$. Donc $\mathcal{C}$ est en-dessous de sa tangente.

3. On en déduit l'allure de la courbe au voisinage du point d'abscisse 1 :

