«Exos-Chronos IX»

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée :

Exercice 1. $f : x \mapsto \ln(1 + 2x)$

Exercice 2. $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1 + x^2}$

Exercice 3. $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

Exercice 4. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x - 1}{x - 2}}$

Exercice 5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$

Exercice 6. $f : x \mapsto \cos^3 x$ et $g : x \mapsto \sin(2x) \cos^2(x)$

Correction

Exercice 1. • $f : x \mapsto \ln(1+2x)$

Ensemble de définition :
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ existe $\iff 1+2x>0 \iff x > -\dfrac{1}{2}$.
Donc l'ensemble de définition de f est $]-\dfrac{1}{2},+\infty[$.
Dérivabilité :
f est la composée de $x \mapsto 1+2x$, dérivable sur $]-\dfrac{1}{2},+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par ln, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est dérivable sur $]-\dfrac{1}{2},+\infty[$
Dérivabilité 2ème méthode :
f est la composée de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition donc f est dérivable sur son ensemble de définition, $]-\dfrac{1}{2},+\infty[$.
Remarque : il faut savoir justifier la dérivabilité par les deux méthodes.
Dérivée :
$\forall x \in]-\dfrac{1}{2},+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$.

Exercice 2. $g : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$
Ensemble de définition :
$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ donc $1+x^2>0$.
Donc g est définie sur $\mathbb{R}$ (c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas).
Dérivabilité :
g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas. Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dérivabilité 2ème méthode :
g est le quotient de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition, donc g est dérivable sur son ensemble de définition ($\mathbb{R}$).
Remarque : il faut savoir justifier la dérivabilité par les deux méthodes.
Dérivée :
$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$

Exercice 3.

$$f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$$

Ensemble de définition :
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ existe $\iff 1-x^2 \geqslant 0 \iff -1 \leqslant x \leqslant 1$. (car $x \mapsto 1-x^2$ est un trinôme de racines 1 et -1, de coefficient dominant -1, donc on connaît parfaitement le signe de ce trinôme. Faire un dessin pour préciser).
Donc l'ensemble de définition de f est $[-1,1]$.
Dérivabilité :
f est la composée de $x \mapsto 1-x^2$, dérivable sur $]-1,1[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par $\sqrt{}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est dérivable sur $]-1,1[$
Dérivabilité 2ème méthode :
Pas de 2ème méthode car la fonction $\sqrt{}$ n'est pas dérivable sur son ensemble de définition !
Dérivée :
$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 4.
$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

Ensemble de définition :
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ existe $\iff \left\{ \begin{array}{l} x-2 \neq 0 \\ \dfrac{x-1}{x-2} \geqslant 0 \end{array} \right.$
On fait un tableau de signe pour étudier le signe de $\dfrac{x-1}{x-2}$ (à faire). On en déduit que l'ensemble de définition de f est $D =]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$. (attention : fermé en 1, ouvert en 2 : il faut savoir expliquer pourquoi !)
Dérivablité :
f est la composée de $x \mapsto \dfrac{x-1}{x-2}$, dérivable sur $D \setminus \{1\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par $\sqrt{}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est dérivable sur $D \setminus \{1\}$.
Dérivabilité 2ème méthode :
Pas de 2ème méthode car la fonction $\sqrt{}$ n'est pas dérivable sur son ensemble de définition !
Dérivée :
$\forall x \in D \setminus \{1\},\ f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}} = \dfrac{-1}{2(x-2)^2} \sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$.

Exercice 5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$

Ensemble de définition :
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ existe $\iff \sin(x) \neq 0$.
Donc l'ensemble de définition est $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Dérivabilité :
f est l'inverse de la fonction sinus, dérivable sur D et ne s'annulant pas sur D, donc f est dérivable sur D.

Autre méthode : f est l'inverse d'une fonction dérivable sur son ensemble de définition, donc f est dérivable sur son ensemble de définition, D.

Dérivée :
$\forall x \in D,\ f'(x) = \dfrac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

Exercice 6. $f : x \mapsto \cos^3 x$

Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ (car cos et la fonction cube sont définies sur $\mathbb{R}$)

Dérivabilité :
f est le cube d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (cos) donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dérivée :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)$

$g : x \mapsto \sin(2x)\cos^2(x)$

Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.

Dérivabilité :

g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dérivée :

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2\cos(2x)\cos^2(x) - \sin(2x)2\sin(x)\cos(x) = 2\cos(2x)\cos^2(x) - \sin^2(2x)$