

PROGRAMME DE COLLE DE LA SEMAINE 26.

Semaine du lundi 13 mai au vendredi 17 mai 2024.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de la semaine 25.
2. Définition de sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Définition de sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. Définition de famille génératrice d'un espace vectoriel.
3. Définition de famille libre, famille liée. Exemple : Soit $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 1, -1))$. Cette famille est-elle libre ou liée? Préciser l'espace vectoriel auquel appartiennent les vecteurs de $\mathcal{F}$.
4. Définition de base. Définition de dimension d'un espace vectoriel. Exemple : base et dimension de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y - z + t = 0 \text{ et } y + z + t = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner sa dimension.
6. Famille génératrice et base, Famille libre et base : énoncés (sans démonstration) des deux théorèmes ("Base extraite", "base incomplète"). Exemples :
 - La famille $((1, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{C}^4$?
 - La famille $((1, 4, 0), (-\sqrt{5}, 1, 1), (0, -2, 1), (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}))$ est-elle libre?
7. Expliquer comment on extrait une base à partir d'une famille génératrice d'un espace vectoriel. On montrera que si v est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$, alors $\text{vect}(v, u_1, \dots, u_p) = \text{vect}(u_1, \dots, u_p)$.
8. Famille libre et base : énoncé ("théorème de la base incomplète" (HP) et conséquences). Démonstration en admettant le premier point. Expliquer comment on peut prouver qu'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n est une base de E .
9. En résumé : comment prouver qu'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est une base de E .

Thème de la colle :

CALCULS - Poser un exercice de la liste « EXOS-CHRONOS X ». L'exercice doit être fait en moins de 2 minutes.

ESPACES VECTORIELS

Définition générale d'espace vectoriel

Définition (hors programme). Exemples. Combinaisons linéaires.

Sous-espaces vectoriels

Définition. Exemples. Intersection, réunion de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

Famille génératrice. Famille libre.

Colinéarité de deux vecteurs. Cas particulier de deux vecteurs. Caractérisation des familles liées. Bases.

Dimension. Exemples.

Famille génératrice et base (théorème de la base extraite et conséquences). Famille libre et base (théorème de la base incomplète et conséquences). Le théorème de la base incomplète est hors programme. Ses conséquences sont au programme).