

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 17 - SUJET A - VENDREDI 3 MAI 2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Déterminer sans justifier l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivée :1. $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)}$ f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-\sin x (1 + \sin^2(x)) - \cos(x) 2 \cos x \sin x}{(1 + \sin^2(x))^2} = \frac{-\sin x - \sin^3 x - 2 \cos^2(x) \sin x}{(1 + \sin^2(x))^2}$$

2. $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}(2x)$ g est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{2}{1 + (2x)^2} = \frac{2}{1 + 4x^2}$$

3. $h : x \mapsto \sqrt{1 + \cos(x)}$ h est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, h'(x) = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{1 + \cos x}}$$

4. $i : x \mapsto \sin(x) \cos^2(x)$ i est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, i'(x) = \cos(x) \cos^2(x) - 2 \sin^2(x) \cos(x)$$

5. $j : x \mapsto \ln(1 + 3x^4)$ j est défini dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, j'(x) = \frac{12x^3}{1 + 3x^4}$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 17 - SUJET B - VENDREDI 3 MAI 2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Déterminer sans justifier l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivée :1. $f : x \mapsto x \mapsto \ln(1 + \cos^2(x))$ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2(x)}$$

2. $g : x \mapsto \cos(x) \sin^2(x)$ g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) &= -\sin(x) \sin^2(x) + 2 \cos(x) \cos(x) \sin x \\ &= -\sin^3(x) + 2 \cos^2(x) \sin x \end{aligned}$$

3. $h : x \mapsto \sqrt{1 + \sin(x)}$ h est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, h'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{1 + \sin(x)}}$$

4. $i : x \mapsto \text{Arctan}(3x)$ i est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, i'(x) = \frac{3}{1 + (3x)^2} = \frac{3}{1 + 9x^2}$$

5. $j : \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)}$ j est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, j'(x) &= \frac{\cos(x)(1 + \cos^2(x)) - \sin(x)(-2 \sin x \cos x)}{(1 + \cos^2(x))^2} \\ &= \frac{\cos(x) + \cos^3(x) + 2 \sin^2(x) \cos(x)}{(1 + \cos^2(x))^2} \end{aligned}$$

Exercice 2 - Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x) - x}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note g la fonction prolongée. Déterminer g .
3. Montrer que g est dérivable sur son ensemble de définition.

① Soit $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } D_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$$

② $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$ donc $\ln(1+x) - x \underset{0}{=} o(x)$

On multiplie ce rd par $\frac{1}{x}$, d'où : $\frac{\ln(1+x) - x}{x} \underset{0}{=} o(1)$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x} = 0$ cette limite est finie donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant :

$$g :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

③ g est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ car elle est le quotient de deux fonctions dérivables sur cet ensemble, le dénominateur ne s'annulant pas.

$$\text{et } \forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[, \quad g'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x} - 1\right)x - (\ln(1+x) - x)}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$(*) \text{ en } 0 : \forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[, \quad \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$\text{or } \ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{donc } \ln(1+x) - x \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{donc } \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \underset{0}{=} -\frac{1}{2} + o(1)$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}$ limite finie, donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = -\frac{1}{2}$

④ Conclusion : g est dérivable sur $]-1, +\infty[$

$$g' :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$