# «Exos-Chronos X»

**Exercice 1.** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée :

1. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$
2. $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}(3x)$

**Exercice 2.** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée :

1. $h : x \mapsto \sqrt{1+\cos(x)}$
2. $i : x \mapsto \sin(x)\cos^2(x)$

**Exercice 3.** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée :

1. $j : x \mapsto \ln(1+3x^4)$
2. $h : x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)}$

**Exercice 4.** Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(x)-x}{x^3} \text{ si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{6} \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que $f$ est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

**Exercice 5.** Soit

$$g : \begin{array}{ccc} ]-1,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que $g$ est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

# Correction

**Exercice 4.** Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(x)-x}{x^3} \text{ si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{6} \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que $f$ est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

---

On cherche si le taux d'accroissement en 0 a une limite quand $x$ tend vers 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\dfrac{\sin(x)-x}{x^3} - (-\frac{1}{6})}{x} = \frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^4}$$

On effectue un développement limité à l'ordre 4 du numérateur :
$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, donc $\sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \underset{0}{=} o(x^4)$.

Donc, en multipliant par $\frac{1}{x^4}$, $\dfrac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^4} \underset{0}{=} o(1)$

On en déduit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Cette limite existe et elle est finie, donc $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

---

**Exercice 5.** Soit

$$g: \begin{array}{ccc} ]-1,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que $g$ est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

---

On cherche si le taux d'accroissement en 0 a une limite quand $x$ tend vers 0 :

$$\forall x \in ]-1,+\infty[\setminus\{0\},\ \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \frac{1}{2}}{x} = \frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

On effectue un DL à l'ordre 3 en 0 du numérateur :
$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \underset{0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

On multiplie par $\frac{1}{x^3}$, d'où $\dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3} \underset{0}{=} \frac{1}{3} + o(1)$.

On en déduit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{1}{3}$. cette limite existe et elle est finie, donc $g$ est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{1}{3}$.