Programme de colle de la semaine 28.

Semaine du lundi 27 mai au vendredi 31 mai 2024.

Questions de cours :

1. Toutes les questions de la semaine 27.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f : (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x + y + 2z, 2x + 3z)$. Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\mathrm{Im} f$. **Un soin particulier devra être accordé à la rédaction**.
3. Définition du rang d'une application linéaire. Énoncé de la proposition reliant l'injectivité, surjectivité et la bijectivité d'une application linéaire et son rang. Énoncé et démonstration (simple, peut être faite à l'oral) des deux corollaires.
4. Exemple illustrant la question de cours précédente : montrer que $f(x, y, z) \mapsto (x+z, y+z, x+y+z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. (on admettra la linéarité).
5. Énoncé du théorème du rang. Le vérifier sur l'exemple :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, x + z) \end{array}$$
6. Définition de la matrice d'une application linéaire f par rapport à des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Exemple : Soient $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = ((1, 1), (1, -1))$. Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + 2y, 2x + y) \end{array}.$$
Justifier (oralement) que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, $\mathcal{M}at_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ et $\mathcal{M}at_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)$.

Thème de la colle :

CALCULS
Poser un exercice de la liste « EXOS-CHRONOS XI». L'exercice doit être fait en moins de 2 minutes.

ESPACES VECTORIELS
Tout le cours

APPLICATIONS LINÉAIRES
Applications linéaires
Définition. Opérations sur les applications linéaires : CL, composition, bijection réciproque.
Noyau et image d'une application linéaire
Définitions. $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sev de E et de F. CNS pour qu'une application linéaire soit injective (surjective).
Rang d'une application linéaire
Image d'une base par une application linéaire. Rang d'une application linéaire. Proposition : f est injective $\iff \mathrm{rg} f = \dim E$, f surjective $\iff \mathrm{rg} f = \dim F$, f est bijective $\iff \mathrm{rg} f = \dim E = \dim F$. Corollaires : Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, f est injective $\iff$ f est injective $\iff$ f est bijective. Il n'existe pas d'isomorphisme entre deux espaces vectoriels de dimensions différentes.
Matrice d'une application linéaire
Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Application linéaire canoniquement associée à une matrice A. Expression matricielle de l'image d'un vecteur. Linéarité de la représentation. Matrice d'une composée. Matrice d'un isomorphisme.