

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 19 - SUJET A - MARDI 21 MAI 2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Résoudre le système suivant. On donnera son rang.

$$(S) : \begin{cases} 2x + 3y - 2z + 3t = 1 \\ x - 2y + z + 2t = 2 \\ 3x + y - z + 5t = \alpha \\ x + 5y - 3z + t = -1 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z + 2t = 2 \\ 2x + 3y - 2z + 3t = 1 \\ 3x + y - z + 5t = \alpha \\ x + 5y - 3z + t = -1 \end{cases} \xrightarrow{L2 \leftrightarrow L1} \begin{cases} x - 2y + z + 2t = 2 \\ 7y - 4z - t = -3 \quad L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ 7y - 4z - t = \alpha - 6 \quad L3 \leftarrow L3 - 3L1 \\ 7y - 4z - t = -3 \quad L4 \leftarrow L4 - L1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z + 2t = 2 \\ 7y - 4z - t = -3 \\ 0 = \alpha - 3 \quad L3 \leftarrow L3 - L2 \\ 0 = 0 \quad L4 \leftarrow L4 - L2 \end{cases}$$

Ce système est échelonné, il est de rang 2

Si $\alpha \neq 3$: Une des équations de compatibilité n'est pas satisfaite, donc l'ensemble des solutions est $\emptyset$

$$\text{Si } \alpha = 3 : (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2t + z - 2y = 2 \\ -t - 4z + 7y = -3 \end{cases}$$

inconnues secondaires

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 7z - 12y \\ t = 3 - 4z + 7y \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est :

$$\{(-4 + 7z - 12y, y, z, 3 - 4z + 7y), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 19 - SUJET A - MARDI 21 MAI 2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Résoudre le système suivant. On donnera son rang.

$$(S) : \begin{cases} 2x + 3y - 2z + 3t = 1 \\ x - 2y + z + 2t = 2 \\ 3x + y - z + 5t = \alpha \\ x + 5y - 3z + t = -1 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z + 2t = 2 \\ 2x + 3y - 2z + 3t = 1 \\ 3x + y - z + 5t = \alpha \\ x + 5y - 3z + t = -1 \end{cases} \xrightarrow{L2 \leftrightarrow L1} \begin{cases} x - 2y + z + 2t = 2 \\ 7y - 4z - t = -3 \quad L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ 7y - 4z - t = \alpha - 6 \quad L3 \leftarrow L3 - 3L1 \\ 7y - 4z - t = -3 \quad L4 \leftarrow L4 - L1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z + 2t = 2 \\ 7y - 4z - t = -3 \\ 0 = \alpha - 3 \quad L3 \leftarrow L3 - L2 \\ 0 = 0 \quad L4 \leftarrow L4 - L2 \end{cases}$$

Ce système est échelonné, il est de rang 2

Si $\alpha \neq 3$: Une des équations de compatibilité n'est pas satisfaite, donc l'ensemble des solutions est $\emptyset$

$$\text{Si } \alpha = 3 : (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2t + z - 2y = 2 \\ -t - 4z + 7y = -3 \end{cases}$$

inconnues secondaires

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 7z - 12y \\ t = 3 - 4z + 7y \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est :

$$\{(-4 + 7z - 12y, y, z, 3 - 4z + 7y), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exercice 2 - Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur ces nombres pour que le système suivant admette au-moins une solution. Indication : on commencera par échelonner ce système.

$$(S) : \begin{cases} 2x + 3y - z = a \\ x + 2y + 2z = b \\ 3x + 5y + z = c \\ x + 3y + 7z = d \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = b & L1 \leftrightarrow L2 \\ 2x + 3y - z = a \\ 3x + 5y + z = c \\ x + 3y + 7z = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = b \\ -y - 5z = a - 2b & L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ -y - 5z = c - 3b & L3 \leftarrow L3 - 3L1 \\ y + 5z = d - b & L4 \leftarrow L4 - L1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = b \\ -y - 5z = a - 2b \\ 0 = -a - b + c & L3 \leftarrow L3 - L2 \\ 0 = a - 3b + d & L4 \leftarrow L4 + L2 \end{cases}$$

Ce système est échelonné. Il a deux équations de compatibilité. Il admet au-moins une solution si, et seulement si, ces deux équations sont satisfaites. Ainsi :

$$(S) \text{ admet au moins une solution si } \begin{cases} -a - b + c = 0 \\ a - 3b + d = 0 \end{cases}$$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 19 - SUJET B - MARDI 21 MAI 2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1 - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Résoudre le système suivant. On donnera son rang.

$$(S) : \begin{cases} 3x + 2y - 2z + 3t = 1 \\ -2x + y + z + 2t = 2 \\ x + 3y - z + 5t = \alpha \\ 5x + y - 3z + t = -1 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z + 5t = \alpha & L1 \leftrightarrow L3 \\ 2x + y + z + 2t = 2 \\ 3x + 2y - 2z + 3t = 1 \\ 5x + y - 3z + t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z + 5t = \alpha \\ 7y - z + 12t = 2 + 2\alpha & L2 \leftarrow L2 + 2L1 \\ -7y + z - 12t = 1 - 3\alpha & L3 \leftarrow L3 - 3L1 \\ -14y + 2z - 24t = -1 - 5\alpha & L4 \leftarrow L4 - 5L1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z + 5t = \alpha \\ 7y - z + 12t = 2 + 2\alpha \\ 0 = 3 - \alpha & L3 \leftarrow L3 + L2 \\ 0 = 3 - \alpha & L4 \leftarrow L4 + 2L2 \end{cases}$$

• système échelonné
• Ce système est de rang 2

Si $\alpha \neq 3$: les équations de compatibilité ne sont pas satisfaites donc l'ensemble des solutions est $\emptyset$

$$\text{Si } \alpha = 3 : (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - z + 3y + 5t = 3 \\ -z + 7y + 12t = 8 \end{cases}$$

inconnues secondaires

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 4y + 7t \\ z = -8 + 7y + 12t \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est :

$$\{(-5 + 4y + 7t, y, -8 + 7y + 12t, t), (y, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Correction

Exercice 2 - Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur ces nombres pour que le système suivant admette au-moins une solution. Indication : on commencera par échanger ce système.

$$(S) : \begin{cases} 3x + 5y + z = a \\ x + 2y + 2z = b \\ 2x + 3y - z = c \\ x + 3y + 7z = d \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = b & L1 \leftrightarrow L2 \\ 3x + 5y + z = a \\ 2x + 3y - z = c \\ x + 3y + 7z = d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = b \\ -y - 5z = a - 3b & L2 \leftarrow L2 - 3L1 \\ -y - 5z = c - 2b & L3 \leftarrow L3 - 2L1 \\ y + 5z = d - b & L4 \leftarrow L4 - L1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = b \\ -y - 5z = a - 3b \\ 0 = b + c - a & L3 \leftarrow L3 - L2 \\ 0 = a - 4b + d & L4 \leftarrow L4 + L2 \end{cases}$$

Ce système est échelonné. Il a deux équations de compatibilité.
Il admet au-moins une solution, si et seulement si, ces deux équations sont satisfaites. Alors :

$$(S) \text{ admet au-moins une solutionssi } \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ a - 4b + d = 0 \end{cases}$$