Lycée Pierre de Fermat — **2024-2025**
BCPST 12 — Feuille d'exercices numéro 1

Logique

Exercice 1. Écrire, à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes et leur négation.

1. Il existe un entier multiple de tous les autres.
2. Tout entier peut s'écrire comme produit de deux entiers.
3. Étant donnés trois réels, il y en a au moins deux de même signe.
4. f est croissante. (f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
5. (u_n) est bornée ((u_n) désigne une suite réelle).

Exercice 2. Écrire la négation des énoncés suivants (f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :
Rappel : la négation de $(A \Rightarrow B)$ est $(A$ et non $B)$.
— $0 < x \leq y$,
— $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall x' \in \mathbb{R},\ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$,
— $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$,

Exercice 3. Montrer par contraposition que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n^2 - 1$ n'est pas multiple de 8, alors n est pair.

Exercice 4. Somme des termes d'une suite géométrique - Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ fixé. Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 + q + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exercice 5. Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$$

1. Rappeler l'écriture d'un nombre impair.
2. Écrire u_n à l'aide d'un symbole sommatoire.
3. Calculer les quatre premiers termes de cette suite. Quelle conjecture peut-on faire sur u_n ?
4. Montrer par récurrence la conjecture précédente.

Exercice 6. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6.

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{p=0}^{n} p$.

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$: "$S_n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$".

1. Démontrer que cette propriété est héréditaire, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 8. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_1 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n. \end{cases}$
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 9. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 2$.

Exercice 10. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$
Montrer par récurrence que cette suite est constante.
Attention à bien poser la propriété de récurrence

Exercice 11. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 3n$.

Exercice 12. Montrer par récurrence que tout entier naturel supérieur ou égal à deux est un nombre premier ou s'écrit comme produit de nombres premiers.
On pourra utiliser la propriété suivante : tout nombre entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.