Sommes et produits.

Exercice 1. Écrire les sommes suivantes en extension, puis calculer :

$$\sum_{k=2}^{5} k \quad , \quad \sum_{k=1}^{4}(k+1) \quad , \quad \sum_{k=0}^{3} 2k \quad , \quad \sum_{0\leqslant 3k\leqslant 12} 3k \quad , \quad \sum_{k=0}^{2} k(2-k) \quad , \quad \sum_{k=2}^{2} k \quad , \quad \sum_{k=0}^{3} 2^k \quad , \quad \sum_{k=0}^{3} 2^{3-k} \quad , \quad \sum_{k=0}^{5} 1$$

Exercice 2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle donnée, et n est un entier naturel fixé. Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$ (il y a plusieurs écritures possibles !) :

1. $5+6+7+8$,
2. $6+8+10$,
3. $a_6+a_8+a_{10}$,
4. $3a_1+3a_2+3a_3+3a_4$,
5. $2+2+2+2+2+2$,
6. $1+3+5+7+9+11$,
7. $1+2+3+...+(2n-1)+2n$,
8. $a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_1+a_0$.
9. $(a_1+1)+(a_2+2)+...+(a_n+n)$
10. $(a_1+1)+(a_2+1)+...+(a_n+1)$,
11. $a_{10}+a_{20}+a_{30}+a_{40}+a_{50}$
12. $na_0+(n-1)a_1+(n-2)a_2+...+2a_{n-2}+1a_{n-1}+0\times a_n$.

Exercice 3. Écrire les produits suivants en extension et les calculer :

$$\prod_{k=1}^{3} k, \quad \prod_{k=0}^{123} k, \quad \prod_{k=6}^{30}(k-17) \quad \prod_{k=3}^{5}(k-2), \quad \prod_{k=1}^{2} 2k, \quad \prod_{k=1}^{10}\frac{k}{k+1}.$$

Exercice 4. Écrire à l'aide de factorielles :

$$\prod_{i=1}^{n}(2i)\ ,\ \prod_{i=3}^{n}(i^2)\ ,\prod_{i=1}^{n}(n+5-i)\ ,\ \prod_{i=1}^{n}(2i-1)\ ,\ \prod_{k=1}^{n}(3k+1)(3k-1).$$

Exercice 5. Calculer :

$$\prod_{k=0}^{n} 2^k\ ,\ \prod_{k=0}^{n} e^{n^2}\ ,\prod_{k=0}^{n}\exp(2k+\sqrt{3}),\prod_{k=0}^{n}\exp(\binom{n}{k}(-1)^k),\ \prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k}\ ,\ \prod_{k=0}^{n}(e^{k+3})^3.$$

Exercice 6. Sommes télescopiques. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies explicitement pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \text{ et } v_n=\prod_{k=1}^{n}(e^{-\frac{3}{k}})^{\frac{1}{k+1}}.$$

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}.$$

2. En déduire l'expression simplifiée

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

préciser la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. En déduire la monotonie et la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 7.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

2. On pose

$$S = \sum_{0\leq 2l \leq n} \binom{n}{2l} \text{ et } T = \sum_{0\leq 2l+1\leq n} \binom{n}{2l+1}.$$

Déterminer $S+T$ et $S-T$.

3. En déduire S et T.

Exercice 8. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2^k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{2k}, \sum_{k=0}^{n} \sin^2 k\theta \ .$$

Exercice 9. Calculer :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 \ , \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i \ , \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (i+j) \ , \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij \ , \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \min(i,j).$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^{i+j} \ , \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} ij \ , \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}.$$