

FONCTIONS USUELLES.

Exercice 1. Écrire en fonction de $\ln 2$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$:

$$\ln(72), \ln(0,125), \ln\left(\frac{1}{12}\right), \ln\left(\frac{1}{500}\right), \ln(16), \ln(2,25)$$

Exercice 2. Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \ln(x) - x$ en $+\infty$.
2. $g : x \mapsto x^2 \exp(5x + 3)$ en $-\infty$
3. $h : x \mapsto \frac{x + \ln(x)}{e^x + x}$ en $+\infty$

Exercice 3. Étudier les fonctions suivantes et tracer leur graphe :

1. $f : x \mapsto \cos(3x)$. On montrera que f est paire, et périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.
2. $g : x \mapsto \frac{2x + 1}{x + 3}$
3. $h : x \mapsto x^3 - 3x + 1$

Exercice 4. Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leq x$.

Illustrer graphiquement cette inégalité (on pourra tracer le graphe de $x \mapsto \ln(1 + x)$).

Exercice 5. Résoudre algébriquement et graphiquement les inégalités et égalités suivantes :

1. $|x| = a$, avec $a \in \mathbb{R}$. (on discutera suivant la valeur de a),
2. $x^2 + x + 1 \geq \frac{1}{2}$,
3. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{2}$,
4. $|x + 1| \leq |2x - 3|$,
5. $3 - 2x \leq |x - \frac{1}{2}|$
6. $|x + 1| = -x + 2$.

Exercice 6. Déterminer les ensembles de définitions des inéquations et des équations suivantes et les résoudre :

1. $\ln|x + 1| - \ln|2x + 1| \leq \ln 2$,
2. $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 1$,
3. $\frac{x}{x-2} \leq \frac{6}{x-1}$,
4. $\frac{2}{x} + x \leq 4$,
5. $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{2x-3}$,
6. $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2$,
7. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes :

1. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$,
2. $2^{x^3} = 3^{x^2}$,
3. $2^x + 2^{x+1} + \dots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \dots + 3^{x+n}$, où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Vrai ou faux ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$,
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*2}, x < y \Rightarrow x^2 < y^2$,
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*2}, x < y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$,
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y < 0 \Rightarrow y^2 < x^2$,
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y < 0 \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$,
7. $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \times 2^n = 2^{2n}$
8. $\forall n \in \mathbb{N}, (3^n)^2 = 3^{2n}$
9. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2n-1} = -2.4^n$
10. $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{n+2} = 9.3^n$.

Éléments de correction, indications.

Exercice 5.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

$$\begin{aligned}|x+1| \leq |2x-3| &\iff (x+1)^2 \leq (2x-3)^2 \\ &\iff 0 \leq (2x-3)^2 - (x+1)^2 \\ &\iff 0 \leq (2x-3+x+1)(2x-3-x-1) \\ &\iff 0 \leq \underbrace{(3x-2)(x-4)}_{(*)}\end{aligned}$$

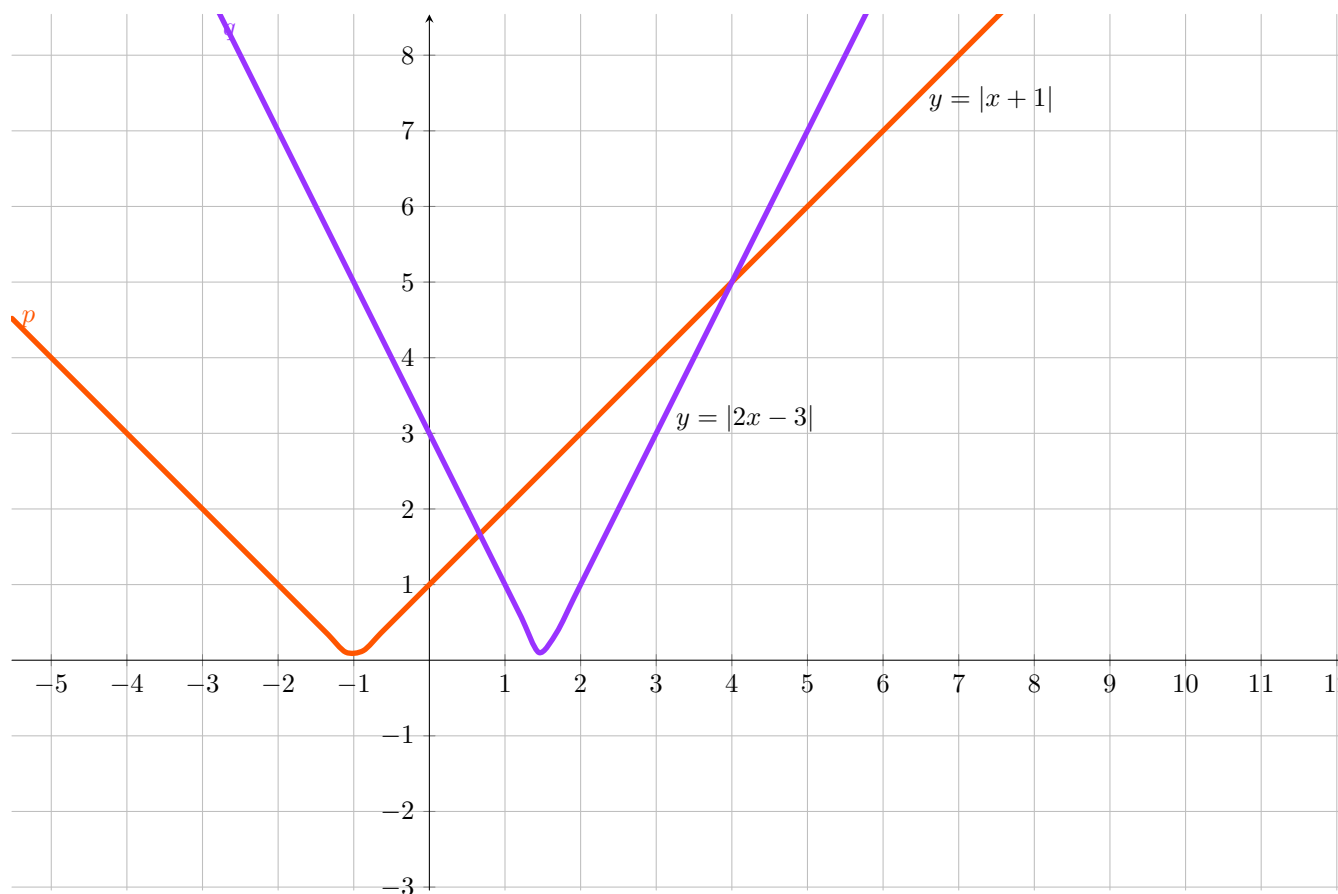
(*) c'est un trinôme de racines 4 et $\frac{2}{3}$. Son coefficient dominant est $3 > 0$. On connaît donc parfaitement son signe.

Ainsi,

$$|x+1| \leq |2x-3| \iff x \leq \frac{2}{3} \text{ ou } x \geq 4$$

Donc l'ensemble des solutions est $] -\infty, \frac{2}{3}] \cup [4, +\infty[$.

Graphiquement : l'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses des points du graphe de $x \mapsto |x+1|$ pour lesquels le graphe de $x \mapsto |x+1|$ (courbe rouge) est en-dessous du graphe de $x \mapsto |2x-3|$ (courbe bleue).



5. $3 - 2x \leq |x - \frac{1}{2}|$

Rappel : Pour tout $A \in \mathbb{R}$, pour tout $X \in \mathbb{R}$,

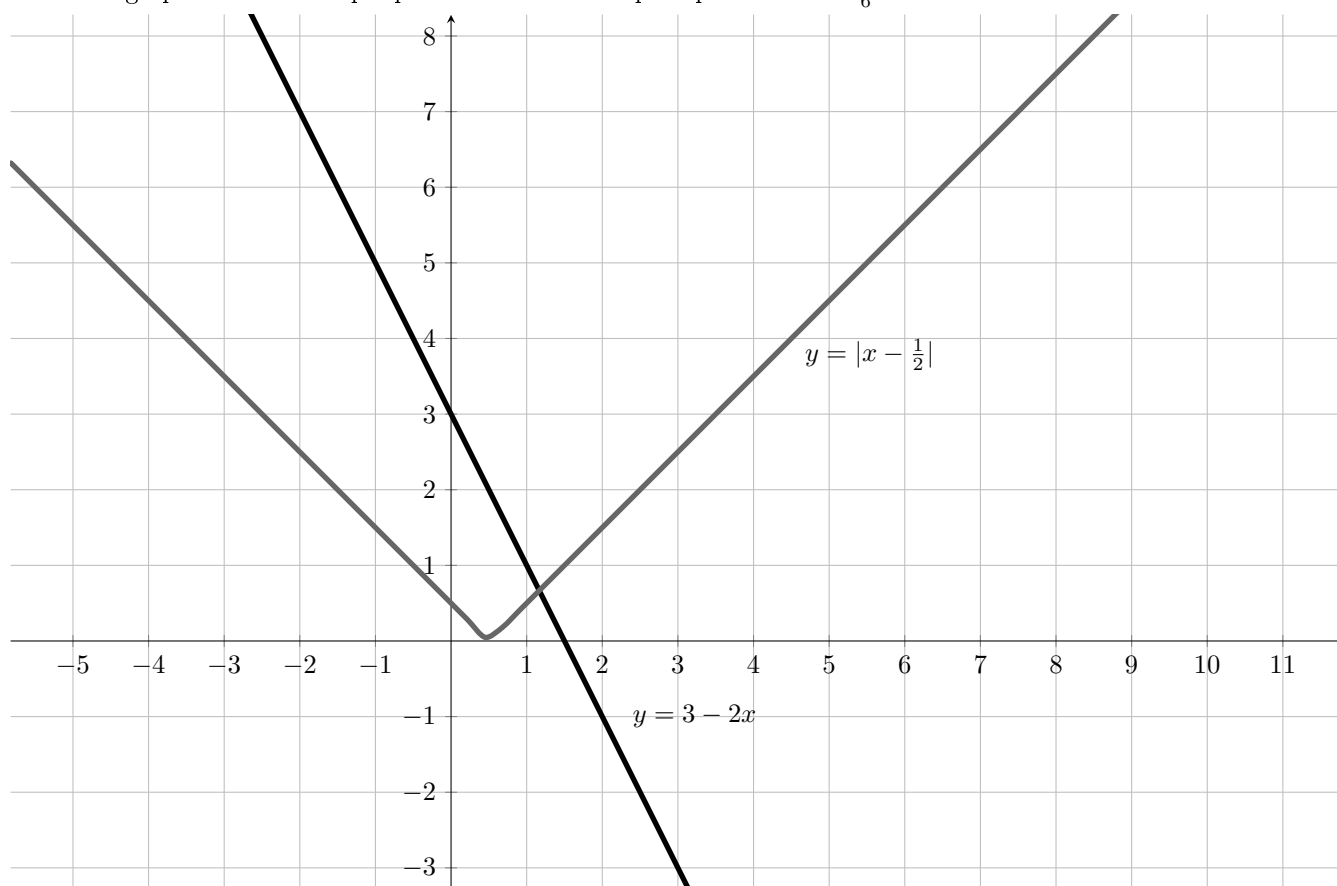
$$A \leq |X| \iff X \leq -A \text{ ou } X \geq A$$

Quand $A \geq 0$, cette équivalence se comprend bien si on se souvient que $|X|$ est la distance de X à 0. Elle est évidente si $A < 0$.

$$\begin{aligned} 3 - 2x \leq |x - \tfrac{1}{2}| &\iff x - \tfrac{1}{2} \leq -(3 - 2x) \text{ ou } 3 - 2x \leq x - \tfrac{1}{2} \\ &\iff \tfrac{7}{6} \leq x \text{ ou } \tfrac{5}{2} \leq x \\ &\iff \tfrac{7}{6} \leq x \text{ car } \tfrac{7}{6} < \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $[\frac{7}{6}, +\infty[$

Interprétation graphique : L'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses des points pour lesquels la droite d'équation $y = 3 - 2x$ est en dessous du graphe de $x \mapsto |2x - 3|$. Ces deux graphes ont un unique point d'intersection qui a pour abscisse $\frac{7}{6}$.



6. $|x + 1| = -x + 2$ (E).

ATTENTION! On n'écrit pas " $|x + 1| = -x + 2 \iff x + 1 = -x + 2$ ou $x + 1 = -(-x + 2)$ "

C'est seulement si $a \geq 0$ que l'on a $|x| = a \iff x = a$ ou $x = -a$.

Il faut revenir à la définition de la valeur absolue pour résoudre cette équation :

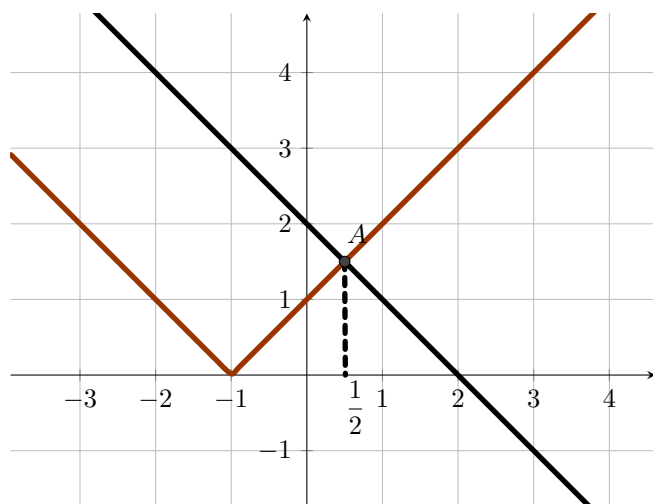
$|x + 1| = x + 1$ si $x + 1 \geq 0$, $|x + 1| = -(x + 1)$ si $x + 1 < 0$.

$$\begin{aligned} (E) &\iff \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 1 = -x + 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + 1 < 0 \\ -x - 1 = -x + 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + 1 < 0 \\ 3 = 0 \text{ (impossible)} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x = 1 \end{cases} \\ &\iff x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Graphiquement : l'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses des points d'intersection des graphes de $x \mapsto |x+1|$ et de $x \mapsto -x+2$.

On voit que ces deux graphes ont un unique point d'intersection, qui a pour abscisse $\frac{1}{2}$.



Exercice 6.

1. $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2$

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de cette équation.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D} &\iff \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 2x+1 \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \neq -1 \\ 2 \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$.

On résout l'équation sur $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2 &\iff \ln|x+1| \leq \ln 2 + \ln|2x+1| \\ &\iff \ln|x+1| \leq \ln(2|2x+1|) & (1) \\ &\iff |x+1| \leq |2(2x+1)| & (2)(*) \\ &\iff (x+1)^2 \leq (4x+2)^2 \\ &\iff 0 \leq (4x+2)^2 - (x+1)^2 \\ &\iff 0 \leq (4x+2+x+1)(4x+2-x-1) \\ &\iff 0 \leq (5x+3)(3x+1) \end{aligned}$$

(*) (1) $\implies$ (2) car on applique exp, croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) $\implies$ (1) car on applique ln, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On fait un tableau de signes :

x	-1		$-\frac{3}{5}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$	
$5x+3$	-		-	0	+		+	+
$3x+1$	-		-	-	-		-	0
$(5x+3)(3x+1)$	+		+	0	-		-	0

On en déduit l'ensemble des solutions : $] -\infty, -1[\cup] -1, -\frac{3}{5}] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty[$.

2. $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 1$

• On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de cette équation.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

$$x \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \underbrace{(x+1)(x-1)}_{\text{trinôme de racines 1 et -1}} > 0 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{D} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

• On résout l'inéquation sur $\mathcal{D}$:

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 1 \iff \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < \ln(e) \quad (1) (*)$$

$$\iff \frac{x+1}{x-1} < e \quad (2)$$

$$\iff \frac{x-1}{x+1} - e < 0$$

$$\iff \frac{x-1}{x+1-e(x-1)} < 0$$

$$\iff \frac{(1-e)x + (1+e)}{x-1} < 0$$

(*) (1) $\implies$ (2) car on applique exp, croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) $\implies$ (1) car on applique ln, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Nous allons faire un tableau de signe pour étudier le signe de ce quotient de deux polynômes de degré 1. Pour cela, il nous faut trouver leurs racines :

dénominateur : $x-1=0 \iff x=1$.

numérateur : $(1-e)x + (1+e) = 0 \iff x = \frac{e+1}{e-1}$. Ce nombre est strictement positif (car $2 < e < 3$).

Il est même strictement supérieur à 1 puisque $e-1 < e+1$.

On en déduit le tableau de signe :

x	1 $\frac{e+1}{e-1}$				
$-(e-1)x + (1+e)$	+	+	0	-	-
$x-1$	-	0	+	+	+
$\frac{-(e-1)x + (1+e)}{x-1}$	-		+	0	-

En recoupant ce résultat avec l'ensemble de définition $\mathcal{D}$, on en déduit :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est }]-\infty, -1[\cup]\frac{e+1}{e-1}, +\infty[.}$$

3. $\frac{x}{x-2} \leq \frac{6}{x-1} \quad (E).$

Ensemble de définition : $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

$$\begin{aligned} (E) &\iff \frac{x}{x-2} - \frac{6}{x-1} \leq 0 \\ &\iff \frac{x(x-1) - 6(x-2)}{(x-2)(x-1)} \leq 0 \\ &\iff \frac{x^2 - 7x + 12}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \end{aligned}$$

On étudie le signe de cette fraction en étudiant le signe de $(x-1)$, $(x-2)$ et $x^2 - 7x + 12$ (trinôme de racines 3 et 4. À l'aide d'un tableau de signe, on trouve :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } [3, 4] \cup]1, 2[.}$$

4. $\frac{2}{x} + x \leq 4 \quad (E).$ Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} (E) &\iff \frac{2}{x} + x - 4 \leq 0 \\ &\iff \frac{x^2 - 4x + 2}{x} \leq 0 \end{aligned}$$

On étudie le signe de ce quotient. Le dénominateur est un trinôme de racines $2 - \sqrt{2}$ et $2 + \sqrt{2}$.
On fait un tableau de signe.

On en déduit l'ensemble des solutions : $] -\infty, 0[\cup [2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$.

5. $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{2x-3}$.

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D} &\iff \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \\ &\iff x \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

On en déduit : $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$.

On résout l'inéquation sur $\mathcal{D}$ (ici on inclut dans les conditions le fait que $x \in \mathcal{D}$) :

$$\begin{aligned} (E) &\iff \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \quad (x \in \mathcal{D}) \\ x+2 \leq 2x-3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 5 \leq x \end{cases} \\ &\iff 5 \leq x \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est : $[5, +\infty[$.

6. $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2$. Ensemble de définition : $\mathbb{R}$. On multiplie par e^x , qui est strictement positif, ce qui nous assure l'équivalence.

$$\begin{aligned} (E) &\iff \frac{1}{2}((e^x)^2 - 1) = 2e^x \\ &\iff (e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0 \\ &\iff e^x \text{ est racine de } X^2 - 4X - 1 = 0 \quad (E') \end{aligned}$$

(E') est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 20 > 0$. Il y a donc deux racines réelles distinctes : $2 - \sqrt{5}$ et $2 + \sqrt{5}$.

On remarque que $2 - \sqrt{5} < 0$ car $\sqrt{4} < \sqrt{5}$. Et $2 + \sqrt{5} > 0$. D'où :

$$\begin{aligned} (E) &\iff \underbrace{e^x = 2 - \sqrt{5}}_{\text{impossible}} \text{ ou } e^x = 2 + \sqrt{5} \\ &\iff e^x = 2 + \sqrt{5} \quad (2 + \sqrt{5} > 0) \\ &\iff x = \ln(2 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\ln(2 + \sqrt{5})\}$.

7. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (E) &\iff e^x - e^{-x} = ae^x + ae^{-x} \\ &\iff (1-a)e^x = (1+a)e^{-x} \\ &\iff (1-a)e^{2x} = (1+a) \end{aligned}$$

Si $a = 1$, $(E) \Leftrightarrow 0 = 2$. Donc si $a = 1$, l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

Si $a \neq 1$, $(E) \iff e^{2x} = \frac{1+a}{1-a}$. Or la quantité $\frac{1+a}{1-a}$ est strictement positive si, et seulement si, $a \in]-1, 1[$ (cela se prouve à l'aide d'un tableau de signe!) Ainsi :

Si $a \leq -1$ ou $a \geq 1$, l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

Si $a \in]-1, 1[$, $(E) \iff 2x = \ln \left(\frac{1+a}{1-a} \right)$.

Donc si $a \in]-1, 1[$, l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+a}{1-a} \right) \right\}$.

Exercice 7.

1. $(E) : x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$. Puisque $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln x}$ et $(\sqrt{x})^x = e^{x \ln \sqrt{x}}$, l'ensemble de définition de cette équation est $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} (E) &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ e^{\sqrt{x} \ln x} = e^{x \ln \sqrt{x}} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ \sqrt{x} \ln x = x \ln \sqrt{x} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ \sqrt{x} \ln x - \frac{1}{2} x \ln x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ (\ln x) \sqrt{x} (1 - \frac{1}{2} \sqrt{x}) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ \ln x = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = 0 \text{ ou } 1 - \frac{1}{2} \sqrt{x} = 0 \end{cases} \\ &\iff x = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{1, 4\}$.

2. $2^{x^3} = 3^{x^2}$. Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (E) &\iff e^{x^3 \ln 2} = e^{x^2 \ln 3} \\ &\iff x^3 \ln 2 = x^2 \ln 3 \\ &\iff x^2 (x \ln 2 - \ln 3) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{\ln 3}{\ln 2} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{0, \frac{\ln 3}{\ln 2}\}$.

3. $2^x + 2^{x+1} + \dots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \dots + 3^{x+n}$. Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (E) &\iff 2^x \underbrace{(1 + 2 + \dots + 2^n)}_{(*)} = 3^x \underbrace{(1 + 3 + \dots + 3^n)}_{(**)} \\ &\iff 2^x \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 3^x \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} \\ &\iff 2^x (2^{n+1} - 1) = 3^x \frac{1}{2} (3^{n+1} - 1) \\ &\iff \left(\frac{2}{3} \right)^x = \frac{3^{n+1} - 1}{2(2^{n+1} - 1)} \quad (1) \\ &\iff x \ln \left(\frac{2}{3} \right) = \ln \left(\frac{3^{n+1} - 1}{2(2^{n+1} - 1)} \right) \quad (2) \\ &\iff x = \frac{\ln \left(\frac{3^{n+1} - 1}{2(2^{n+1} - 1)} \right)}{\ln \left(\frac{2}{3} \right)} \quad (3) \end{aligned}$$

(*) : somme des termes d'une suite géométrique de raison $2 \neq 1$

(**) : somme des termes d'une suite géométrique de raison $3 \neq 1$

(1) $\implies$ (2) car on applique $\ln$. C'est possible car les nombres sont strictement positifs.

(2) $\implies$ (1) car on applique $\exp$.

(3) : on divise par $\ln\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0$.

On en déduit l'ensemble des solutions : $\left\{ \frac{\ln\left(\frac{3^{n+1}-1}{2(2^{n+1}-1)}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \right\}.$