NOM - Prénom : **BCPST 12**
Interrogation écrite $n^o 3$.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 3. SUJET A.

Vendredi 27 septembre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Résoudre : $x^2 + 3x + 5 \geqslant 4$

$x^2+3x+5 \geqslant 4 \iff \underbrace{x^2+3x+1}_{} \geqslant 0$

trinôme de discriminant $\Delta = 9-4 = 5 > 0$
donc il a 2 racines réelles $\neq^{tes}$: $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{\text{L'ensemble des sol° est : } \left]-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[}$

(car le coeff^t dominant du trinôme est >0)

Exercice 2

Résoudre : $|2x-2| = \frac{x}{2} - 1$

$|2x-2| = \frac{x}{2}-1 \iff \begin{cases} 2x-2 \geqslant 0 \\ 2x-2 = \frac{x}{2}-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x-2 < 0 \\ -2x+2 = \frac{x}{2}-1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \geqslant 1 \\ \frac{3}{2}x = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < 1 \\ \frac{5}{2}x = 3 \end{cases}$

$\iff \left.\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}\right)$ impossible ! ou $\left.\begin{cases} x<1 \\ x = \frac{6}{5} \end{cases}\right)$ impossible !

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \emptyset}$

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto \ln(9-x^2)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. On notera $\mathcal{D}$ cet ensemble.
2. Montrer que f est paire. En déduire l'ensemble d'étude, noté $\mathcal{E}$.
3. Établir le tableau de variation de f sur $\mathcal{E}$ (dérivabilité, dérivée, signe de la dérivée, limites ou valeurs aux bornes de $\mathcal{E}$)
4. Tracer l'allure du graphe de f. On donne : $\ln(3) \simeq 1,1$

① Soit $x \in \mathbb{R}$

$x \in \mathcal{D} \iff 9 - x^2 > 0$
$\iff 9 > x^2$
$\iff -3 < x < 3$

donc $\mathcal{D} =]-3, 3[$

② ⊛ Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$

⊛ $\forall x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = \ln(9-(-x)^2) = \ln(9-x^2) = f(x)$

donc f est paire.

On en déduit l'ensemble d'étude : $\boxed{\mathcal{E} = [0, 3[}$

Bonus : intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses :

on résout :

$f(x)=0 \iff \ln(9-x^2)=0$

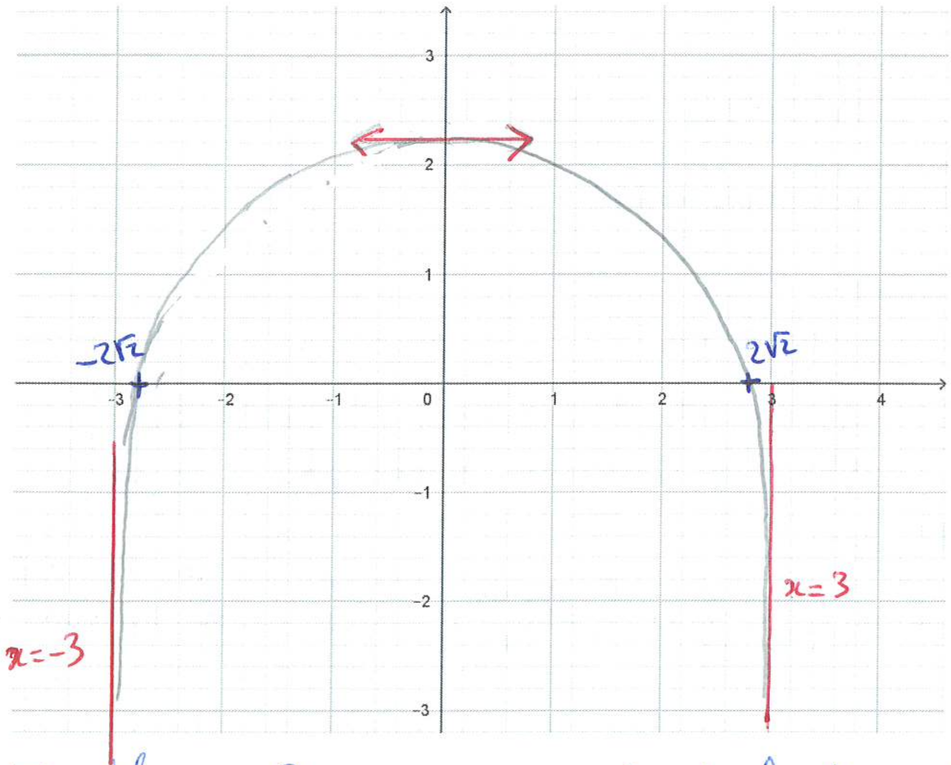
$\iff 9-x^2=1$

$\iff x^2=8$

$\iff x=\sqrt{8}$ ou $x=-\sqrt{8}$

$\iff x=2\sqrt{2}$ ou $x=-2\sqrt{2}$

avec $2\sqrt{2} \simeq 2\times 1{,}4 = 2{,}8$



③ f est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme composée de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition, et $\boxed{\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) = \dfrac{-2x}{9-x^2}}$ est du signe de $-2x$

x	0		3
$f'(x)$	0	$-$	||
f	$\ln 9$	$\searrow$	$-\infty$ ||

④ limite en 3 :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3} 9-x^2 = 0 \\ \lim\limits_{y \to 0} \ln(y) = -\infty \end{cases}$$

donc par composition des limites,

$$\lim_{x \to 3} \ln(9-x^2) = -\infty$$

④ valeur en 0 : $f(0) = \ln 9 = \ln(3^2) = 2\underbrace{\ln 3}_{\simeq 1{,}1} \simeq 2{,}2$

Tracé : On trace $\mathcal{C}_f$ sur $[0, 3[$

On effectue ensuite une symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Oy) pour obtenir toute la courbe.

Rq : - $\mathcal{C}_f$ présente une tangente horizontale en $x=0$

- les droites d'équation $x=3$ et $x=-3$ sont asymptotes verticales à $\mathcal{C}_f$

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 3. SUJET B.

Vendredi 27 septembre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Résoudre : $|2x+2| = x - \dfrac{1}{2}$

$|2x+2| = x - \frac{1}{2} \iff \begin{cases} 2x+2 \geqslant 0 \\ 2x+2 = x - \frac{1}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x+2 < 0 \\ -2x-2 = x - \frac{1}{2} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \geqslant -1 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < -1 \\ 3x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \geqslant -1 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

impossible

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \emptyset}$

Exercice 2

Résoudre : $x^2 + 3x + 4 \leqslant 5$

$x^2 + 3x + 4 \leqslant 5 \iff \underbrace{x^2 + 3x - 1}_{} \leqslant 0$

trinôme de discriminant $\Delta = 9 + 4 = 13 > 0$
donc il a deux racines réelles $\neq^{tes}$:
$\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$
Son coefficient dominant est > 0, donc :

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left[\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right]}$

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto \ln(4 - x^2)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. On notera $\mathcal{D}$ cet ensemble.
2. Montrer que f est paire. En déduire l'ensemble d'étude, noté $\mathcal{E}$.
3. Établir le tableau de variation de f sur $\mathcal{E}$ (dérivabilité, dérivée, signe de la dérivée, limites ou valeurs aux bornes de $\mathcal{E}$)
4. Tracer l'allure du graphe de f. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$

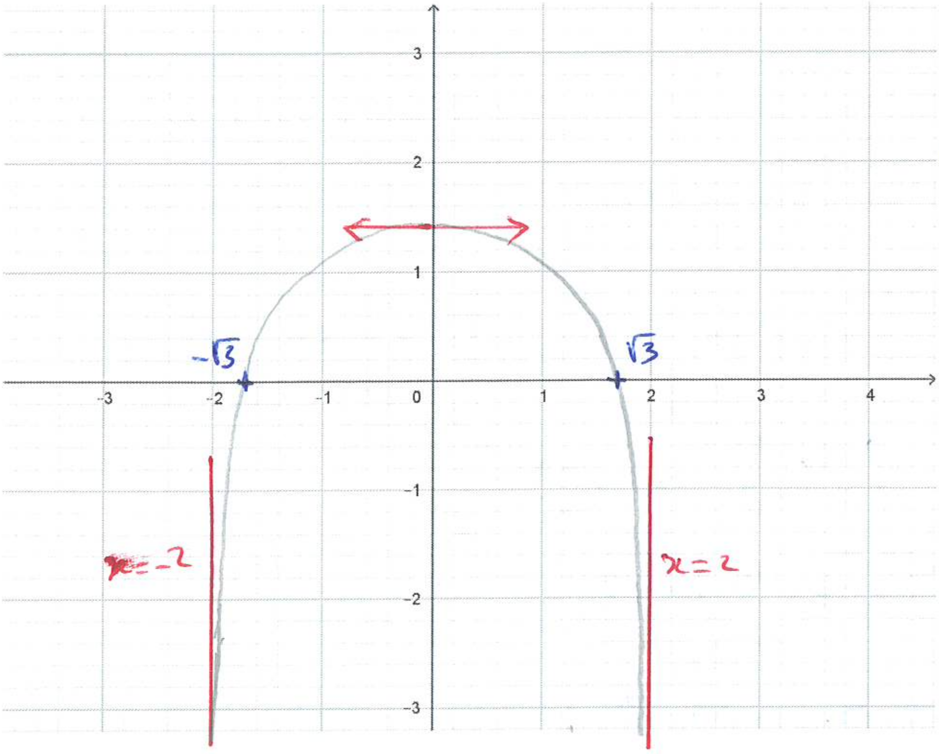
① Soit $x \in \mathbb{R}$.
$x \in \mathcal{D} \iff 4 - x^2 > 0$
$\iff x^2 < 4$
$\iff -2 < x < 2$

donc $\mathcal{D} =]-2, 2[$

② • $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$
• $\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = \ln(4 - (-x)^2) = \ln(4 - x^2) = f(x)$

donc f est paire.

On en déduit l'ensemble d'étude $\boxed{\mathcal{E} = [0, 2[}$



Bonus : intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses : on résout :

$f(x)=0 \iff \ln(4-x^2)=0$

$\iff 4-x^2=1$

$\iff x^2=3$

$\iff x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$

avec $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$

③ f est dérivable sur $\mathscr{D}$ car c'est la composée de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition

et $\forall x \in \mathscr{D}$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{4-x^2}$ $\leftarrow >0$ sur $\mathscr{D}$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x$.

x	0		2
$f'(x)$	0	$-$	‖
f	$\ln 4$	$\searrow$	$-\infty$ ‖

✱ limite en 2 :

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2} 4-x^2 = 0 \\ \lim\limits_{y\to 0} \ln(y) = -\infty \end{cases}$

donc par composition des limites, $\lim\limits_{x\to 2} \ln(4-x^2) = -\infty$

✱ valeur en 0 : $f(0) = \ln 4 = 2\ln 2 \simeq 1{,}4$

Tracé : On trace $\mathscr{C}_f$ sur $[0, 2[$

On effectue ensuite une symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Oy) pour obtenir toute la courbe.

Rq : $\mathscr{C}_f$ présente une tangente horizontale en $x=0$

les droites d'équation $x=2$ et $x=-2$ sont asymptotes verticales à $\mathscr{C}_f$