BCPST 1.2

Corrigé du devoir maison n° 3

— —

Exercice 1 - Calculs

1. (a) $S = \sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2) = \sum_{k=0}^{n}(k^2+3k+2)$

$= \sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3.\frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1).$

$S = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{3n}{2} + 2\right] = \boxed{\frac{(n+1)(n^2+5n+6)}{3}}.$

(b) $S = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{4^{n-k}} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k.x^k = \frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(4x)^k = \frac{1}{4^n}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(4x)^k - 1\right]$

$\boxed{= \frac{(4x+1)^n - 1}{4^n}}.$

(c) $P = \prod_{k=1}^{n} x^{k+1} = \prod_{k=1}^{n} xx^k = x^n \prod_{k=1}^{n} x^k = x^n x^{\sum_{k=1}^{n} k} = x^n x^{\frac{n(n+1)}{2}} = x^{n+\frac{n(n+1)}{2}} = \boxed{x^{\frac{n(n+3)}{2}}}.$

2. **Nombres complexes et trigonométrie**

(a) On trouve : $\boxed{a = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } b = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}.$

(b) $\frac{\sqrt{3}+3i}{1-i} = \frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Donc $\boxed{\frac{\sqrt{3}+3i}{1-i} = \sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{12}}}.$

(c) $\frac{\sqrt{3}+3i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$. Donc $\boxed{\frac{\sqrt{3}+3i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}+3}{2}}.$

(d) D'après la question b., $\frac{\sqrt{3}+3i}{1-i} = \sqrt{6}\cos\frac{7\pi}{12} + i\sqrt{6}\sin\frac{7\pi}{12}$. On en déduit, en identifiant d'une part les parties réelles et d'autre part les parties imaginaires des deux expressions obtenues (en b. et c.) :

$\sqrt{6}\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-3}{2}$, donc $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6}}$, donc $\boxed{\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}.$

Et de même, $\boxed{\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}.$

Or $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}) = -\sin\frac{\pi}{12}$. On en déduit $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}.$

De même, $\sin\frac{7\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}) = \cos\frac{\pi}{12}$. On en déduit : $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}.$

3. On factorise par l'angle moitié : $z = e^{\frac{3i\pi}{5}}(e^{-\frac{3i\pi}{5}} + e^{\frac{3i\pi}{5}}) = e^{\frac{3i\pi}{5}}2\cos\frac{3\pi}{5}.$
Or $\frac{\pi}{2} < \frac{3i\pi}{5} < \pi$ donc $\cos\frac{3\pi}{5} < 0.$

Donc $|z| = |2\cos\frac{3\pi}{5}| = -2\cos\frac{3\pi}{5}$.
Puis, $\dfrac{z}{|z|} = -e^{\frac{3i\pi}{5}} = e^{i\pi}e^{\frac{3i\pi}{5}} = e^{\frac{8i\pi}{5}}$.
Donc $\boxed{\text{le module de } z \text{ est } -2\cos\frac{3\pi}{5} \text{ et } \frac{8\pi}{5} \text{ en est un argument}}$.

4. **Somme télescopique**

   (a) D'après les formules d'Euler, $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{(2i)^2\times 2i} = \dfrac{\sin 3x - 3\sin x}{-4}$.
   Ainsi, $\boxed{\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x.}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} 3^k\left(\frac{3}{4}\sin\left(\frac{\theta}{3^k}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{3\theta}{3^k}\right)\right)$ d'après la formule précédente.
   Donc $S_n = \frac{3}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(3^k\sin\left(\frac{\theta}{3^k}\right) - 3^{k-1}\sin\left(\frac{\theta}{3^{k-1}}\right)\right)$ (somme télescopique).

   $\boxed{\text{Donc } S_n = \frac{3^{n+1}}{4}\sin\left(\frac{\theta}{3^n}\right) - \frac{3}{4}\sin(\theta)}$.

Exercice 2

1. On calcule les premiers termes de cette suite en utilisant la relation de récurrence et les deux premiers termes :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R}, & T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ & T_3(x) = 4x^3 - 3x \\ & T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ & T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{array}}$$

2. (a) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés quelconque. On applique les formules de trigonométrie donnant le cosinus d'une somme :

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta &= \cos(n\theta + \theta) + \cos(n\theta - \theta) \\ &= \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta + \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta \\ &= 2\cos n\theta\cos\theta \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Donc } \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta = 2\cos n\theta\cos\theta}$.

   (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence : $\mathcal{P}(n)$: ´$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$˘.

   - $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies car $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0)$ et $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ par définition de T_0 et T_1.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ soient vraies.
     Alors, d'après la relation de récurrence définissant la suite (T_n),

$$T_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)T_n(\cos(\theta)) - T_{n-1}(\cos(\theta)).$$

     Or $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies, donc $T_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - (\cos((n-1)\theta))$. D'après la question précédente, on a donc $T_{n+1}(\cos\theta) = \cos((n+1)\theta)$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.
   - Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. D'après la question précédente :

$$\boxed{\begin{array}{c} T_n(-1) = T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi) = (-1)^n \\ T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n \times 0) = 1 \end{array}}$$

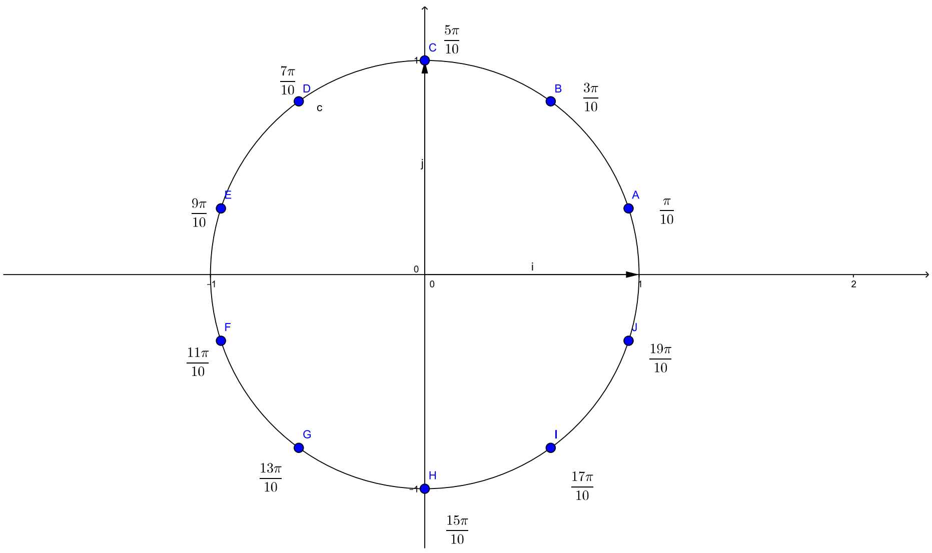
3. (a) Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(5\theta) = 0 &\iff \cos(5\theta) = \cos\tfrac{\pi}{2} \\ &\iff 5\theta = \tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \theta = \tfrac{\pi}{10} + k\tfrac{\pi}{5},\ \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est : $\boxed{\left\{\frac{\pi(1+2k)}{10},\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}}$, qui est aussi :

$\{\frac{\pi}{10} + 2k\pi, \frac{3\pi}{10} + 2k\pi, \frac{5\pi}{10} + 2k\pi, \frac{7\pi}{10} + 2k\pi, \frac{9\pi}{10} + 2k\pi, \frac{11\pi}{10} + 2k\pi, \frac{13\pi}{10} + 2k\pi, \frac{15\pi}{10} + 2k\pi, \frac{17\pi}{10} + 2k\pi, \frac{19\pi}{10} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) On peut représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :



(c) $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$. Donc, puisque la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\boxed{\cos\frac{\pi}{10} > \frac{\sqrt{3}}{2}}$ (car $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

(d) La relation établie à la question 2b donne, pour $n = 5$: $\forall\theta \in \mathbb{R},\ T_5(\cos\theta) = \cos(5\theta)$.
Donc, pour $\theta = \cos\frac{\pi}{10}$: $T_5(\cos\frac{\pi}{10}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.
D'où (puisque nous connaissons T_5) : $16\cos^5\frac{\pi}{10} - 20\cos^3\frac{\pi}{10} + 5\cos\frac{\pi}{10} = 0$. Factorisons par $\cos\frac{\pi}{10}$:
$\cos\frac{\pi}{10}\left(16\cos^4\frac{\pi}{10} - 20\cos^2\frac{\pi}{10} + 5\right) = 0$
Or nous avons vu que $\cos\frac{\pi}{10} \neq 0$. On en déduit : $16\cos^4\frac{\pi}{10} - 20\cos^2\frac{\pi}{10} + 5 = 0$.
$\boxed{\text{Donc } \cos\frac{\pi}{10} \text{ est une solution de l'équation } (E) : 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0}$.

(e) On pose $y = x^2$ dans l'équation (E).

$$\begin{aligned} (E) &\iff \left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ 16y^2 - 20y + 5 = 0 \text{ équation du 2d degré!} \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \text{ ou } y = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \end{array}\right. \\ &\iff x = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \\ &\quad\ \text{car } \frac{5+\sqrt{5}}{8} > 0 \text{ et } \frac{5-\sqrt{5}}{8} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{\left\{\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right\}}$$

(f) Nous avons vu que (E) admet 4 solutions deux à deux distinctes : deux solutions strictement positives et leurs opposés. On a :

$$\boxed{-\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}$$

De plus, $0 < 5-\sqrt{5} < 6$ donc $0 < \frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{6}{8}$. Donc $0 < \frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{4}$. En appliquant la fonction $\sqrt{}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $\boxed{\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

(g) Nous savons que $\cos\frac{\pi}{10}$ est solution de (E). Or nous avons explicité les solutions de (E) à la question 3e. Donc $\cos\frac{\pi}{10}$ est l'une des quatre valeurs trouvées à la question 3e. Or $\cos\frac{\pi}{10} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et sur les quatre solutions obtenues au 3e, trois sont strictement inférieures à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc, par élimination, la seule valeur possible de $\cos\frac{\pi}{10}$ est la dernière : $\boxed{\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}}$.

Exercice 3.

1. (a) g est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (car $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x^2 > 0$). $\boxed{\text{Donc } g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \dfrac{2(-x)}{(-x)^2+1} = \dfrac{-2x}{x^2+1} = -g(x)$. $\boxed{\text{Donc } g \text{ est impaire}}$. On en déduit que sa courbe représentative est invariante par symétrie centrale de centre O.

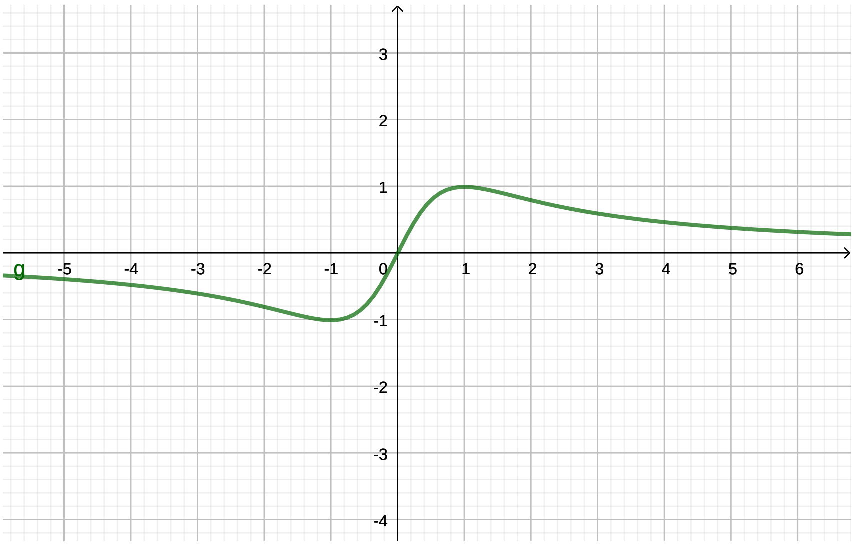
(c) g est une fraction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, $\mathbb{R}$.
Et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{2(x^2+1)-(2x)^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

(d) Puisque g est impaire, on peut se contenter de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. On obtiendra ensuite toute la courbe à partir du tracé sur $\mathbb{R}_+$, en effectuant une symétrie centrale de centre O.
$g'(x)$ est du signe de $1-x^2$. On en déduit le tableau de variation (sur $\mathbb{R}_+$) :

x	0		1		0 $+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	
g			1		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

Précisions sur les valeurs et limites :
En 0 : $g(0) = 0$
En $+\infty$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \dfrac{2x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \dfrac{2}{x(1+\frac{1}{x^2})}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$ par quotient des limites.

(e) On en déduit l'allure du graphe de g :



(f) D'après l'étude précédente (tableau de variation ou graphe), la fonction étant continue, $\boxed{g(\mathbb{R}) = [-1, 1]}$.

(g) $\boxed{g \text{ n'est pas injective}}$ car par exemple, $2 \neq \dfrac{1}{2}$ et $g(2) = g(\frac{1}{2})$.

(h) $\boxed{g \text{ n'est pas surjective}}$ car $g(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ (par exemple $3 \in \mathbb{R}$ (ensemble d'arrivée)mais 3 n'a pas d'antécédent par g.

(i) Posons $\boxed{I = [-1, 1] \text{ et } J = [-1, 1]}$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \tilde{g} : & I & \to & J \\ & x & \mapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$$

est bijective. En effet, elle est strictement croissante donc injective. Et J est l'ensemble image : $\tilde{g}(I) = J$, donc $\tilde{g}$ est surjective.

2. (a) $f(x)$ est défini si $(x+1)$ et $(1-x)$ sont de même signe et non nuls donc $\boxed{\mathcal{D} =]-1, 1[}$.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.
Étudions l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathcal{D}$: $f(x) = y$.
$f(x) = y \Leftrightarrow (e^y - 1) = x(e^y + 1)$.
Puisque $e^y + 1$ est non nul (>1), il y a une solution unique $x = \frac{e^y-1}{e^y+1}$. On vérifie que $x + 1 = \frac{2e^y}{e^y+1} > 0$ et $1 - x = \frac{2}{e^y+1} > 0$ donc cette solution est bien dans $\mathcal{D}$.
f est donc une bijection de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ et son application réciproque est :

$$\boxed{f^{-1} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ x & \mapsto & \frac{e^y-1}{e^y+1} \end{array} \right.}$$

(c) $\forall y \in \mathbb{R}, g \circ f^{-1}(y) = \frac{2(e^y-1)(e^y+1)}{(e^y-1)^2+(e^y+1)^2} = f^{-1}(2y)$ donc $\boxed{f \circ g \circ f^{-1} = 2id_{\mathbb{R}}}$ où $id_{\mathbb{R}}$ est l'identité de $\mathbb{R}$