CORRECTION

NOM - Prénom : **BCPST 12**

Interrogation écrite n^o4.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 4. SUJET A.

Vendredi 11 octobre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{3k-1}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{3k-1}} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2^3)^k} = 2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{8}\right)^k$$

somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{8} \neq 1$

$$= 2 \times \frac{1}{8}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1-\frac{1}{8}}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{\left(\frac{7}{8}\right)}$$

donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{3k-1}} = \frac{2}{7}\left(1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right)}$

Exercice 2

Donner **sans justifier** la forme trigonométrique (forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$) de i, -1, 2, $-3i$.

$\boxed{i = e^{i\frac{\pi}{2}}}$ $\boxed{-1 = e^{i\pi}}$ $\boxed{2 = 2e^{i0}}$ $\boxed{-3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

Exercice 3

1. Donner la forme trigonométrique (forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$) de $\sqrt{3}+3i$ et de $1-i$.
2. En déduire la forme trigonométrique de $\dfrac{\sqrt{3}+3i}{1-i}$

1. $\boxed{\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}}$ $\boxed{1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

2. $\dfrac{\sqrt{3}+3i}{1-i} = \dfrac{2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{6}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$

donc $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}+3i}{1-i} = \sqrt{6}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}}$

Exercice 4
On pose $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$.

1. Factoriser z par l'angle moitié.
2. En déduire le module et un argument de z.

① $z = e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{12}}\right)$

donc $\boxed{z = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}}$

② $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ et cos est >0 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

donc $\cos\frac{\pi}{12} > 0$

donc $|z| = \left|2\cos\frac{\pi}{12}\right| \times \underbrace{\left|e^{i\frac{\pi}{12}}\right|}_{=1} = 2\cos\frac{\pi}{12}$ (car $\cos\frac{\pi}{12} > 0$)

et $\frac{z}{|z|} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

Ainsi, $\boxed{|z| = 2\cos\frac{\pi}{12} \text{ et } \frac{\pi}{12} \text{ est un argument de } z}$

CORRECTION

NOM - Prénom :

BCPST 12
Interrogation écrite $n^o 4$.

INTERROGATION ÉCRITE NUMÉRO 4. SUJET B.

Vendredi 11 octobre 2024.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{2k+1}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{2k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3^2)^k} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9^k}$$ somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{9} \neq 1$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1-\frac{1}{9}} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} \times \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{\left(\frac{8}{9}\right)}$$

Donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{2k+1}} = \frac{1}{24}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right)}$

Exercice 2

Donner **sans justifier** la forme trigonométrique (forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$) de $-i$, 1, -2, $3i$.

$\boxed{-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}}$ $\boxed{1 = e^{i0}}$ $\boxed{-2 = 2e^{i\pi}}$ $\boxed{3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}}$

Exercice 3

1. Donner la forme trigonométrique (forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$) de $3 - i\sqrt{3}$ et de $1 + i$.
2. En déduire la forme trigonométrique de $\frac{3-i\sqrt{3}}{1+i}$

① $\boxed{3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}}$ $\boxed{1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$

② $$\frac{3-i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{6}\, e^{-i\frac{\pi}{6}-i\frac{\pi}{4}}$$

donc $\boxed{\frac{3-i\sqrt{3}}{1+i} = \sqrt{6}\, e^{-\frac{5i\pi}{12}}}$

Exercice 4

On pose $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. Factoriser z par l'angle moitié.
2. En déduire le module et un argument de z.

① $1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$

donc $\boxed{1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}}$

② $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$

donc $\left|\cos\frac{\pi}{8}\right| = \cos\frac{\pi}{8}$

donc $\left|1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = \left|2\cos\frac{\pi}{8}\right| \times \underbrace{\left|e^{i\frac{\pi}{8}}\right|}_{1} = 2\cos\frac{\pi}{8}$

et $\dfrac{1 + e^{i\frac{\pi}{4}}}{\left|1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\right|} = e^{i\frac{\pi}{8}}$

Donc $\boxed{|z| = 2\cos\frac{\pi}{8} \text{ et } \frac{\pi}{8} \text{ est un argument de } z}$